TEMA 1: ELECCIÓN EN CONDICIONES DE NO CERTEZA

Lotería:

$$L=\{(a_1,\pi_1),(\dots),(a_n,\pi_n)\}$$

Composición de loterías:

$$L=\alpha M\otimes(1-\alpha)N$$

Valor esperado (m discreta):

$$E[m]=\sum_{i=1}^{n}m_i\pi_i$$

Valor esperado (m continua):

$$E[m]=\int_{m\in M}m\,f(m)\,dm$$

Utilidad esperada (m discreta):

$$E\left[u(m)\right]=\sum_{i=1}^{n}u(m_i)\pi_i$$

Utilidad esperada (m continua):

$$E\left[u(m)\right]=\int_{m\in M}u(m)\,f(m)\,dm$$

Utilidad del valor esperado:

$$u\left(E[m]\right)$$

Equivalente cierto:

$$u\left(\xi(M)\right)=E\left[u(M)\right]$$

Relación entre la función de utilidad y el comportamiento frente al riesgo:

$$u''=0:\text{neutral}\qquad u''>0:\text{amante}\qquad u''<0:\text{averso}$$

Prima de riesgo:

$$P_M=E[M]-\xi(M)$$

$$P_M=0:\text{neutral}\qquad P_M<0:\text{amante}\qquad P_M>0:\text{averso}$$

Coef. abs. de aversión al riesgo:

$$\rho_A=-\frac{u''(m)}{u'(m)}$$

Coef. relativo de aversión al riesgo:

$$\rho_R=m\rho_A$$

$$P_M=\frac{1}{2}\rho_A\sigma^2$$

Según cómo varíen los coef. de aversión respecto a m, la f. de utilidad puede ser: Increasing/Decreasing/Constant Absolute/Relative Risk Aversion (IARA, DRRA, etc.)

$$\frac{d\rho_A(m)}{dm}>0:\text{IARA}\qquad\qquad \frac{d\rho_R(m)}{dm}>0:\text{IRRA}$$

$$\frac{d\rho_A(m)}{dm}<0:\text{DARA}\qquad\qquad \frac{d\rho_R(m)}{dm}<0:D\text{RRA}$$

$$\frac{d\rho_A(m)}{dm}=0:\text{CARA}\qquad\qquad \frac{d\rho_R(m)}{dm}=0:\text{CRRA}$$

Criterios de dominancia estocástica

Sean 2 variables aleatorias: r_1, r_2. $r_i \in [l, s]$

$$E[r_i] = s - \int_l^s F_i(r_i)\, dr_i$$

- FSD (first-order stochastic dominance):
  $r_1 \,\mathrm{FSD}\, r_2 \leftrightarrow F_1(x) \leq F_2(x)$
- SSD (second-order stochastic dominance):
  $r_1 \,\mathrm{SSD}\, r_2 \leftrightarrow \int_l^x F_1(z)\, dz \leq \int_l^x F_2(z)\, dz$
- RSD (Rothschild Stiglitz dominance):
  $r_1 \,\mathrm{RSD}\, r_2 \leftrightarrow r_1 \,\mathrm{SSD}\, r_2 \wedge E[r_1] = E[r_2]$

Relación entre los criterios (la flecha → indica implicación en un solo sentido):

- $r_1 \,\mathrm{FSD}\, r_2 \rightarrow r_1 \,\mathrm{SSD}\, r_2$
- $r_1 \,\mathrm{SSD}\, r_2 \rightarrow E[r_1] \geq E[r_2]$
- $r_1 \,\mathrm{RSD}\, r_2 \rightarrow r_1 \,\mathrm{SSD}\, r_2$
- $r_1 \,\mathrm{RSD}\, r_2 \rightarrow \mathrm{Var}(r_1) \leq \mathrm{Var}(r_2)$

<u>Criterios de elección según la dominancia estocástica</u>

Sea: U^1 las f. de utilidad crecientes, U^2 las f. de utilidad cóncavas. Teoremas:

1. $r_1 \,\mathrm{FSD}\, r_2 \leftrightarrow E[u(r_1)] \geq E[u(r_2)]\, \forall u \in U^1$
2. $r_1 \,\mathrm{SSD}\, r_2 \leftrightarrow E[u(r_1)] \geq E[u(r_2)]\, \forall u \in U^1 \cap U^2$
3. $r_1 \,\mathrm{RSD}\, r_2 \leftrightarrow E[u(r_1)] \geq E[u(r_2)]\, \forall u \in U^2$

TEMA 2: APLICACIONES DE LA ELECCIÓN BAJO NO CERTEZA

Mercado de seguros

π	Probabilidad de accidente	$0<\pi<1$
x	Cantidad de capital a asegurar	$0 \le x \le L$
p	Prima que cobra el seguro	$0<p<1$

Llamaremos w^n a la renta sin seguro, y w^s a la renta con seguro.

$$w^n \begin{cases} w_0 & \text{prob. } 1-\pi \\ w_0 - L & \text{prob. } \pi \end{cases} \qquad w^s \begin{cases} w_0 - px & \text{prob. } 1-\pi \\ w_0 - px - L + x & \text{prob. } \pi \end{cases}$$

Beneficio para la compañía de seguros:

$$B_{\text{esperado}} = px - \pi x \ge 0 \quad \leftrightarrow \quad p \ge \pi$$

Renta esperada del cliente:

$$E\left[w^n\right] = w_0 - \pi L \qquad E\left[w^s\right] = w_0 - \pi L - \left(p-\pi\right)x$$

Varianza de la renta del cliente:

$$\operatorname{Var}\left(w^n\right) = L^2\pi\left(1-\pi\right) \qquad \operatorname{Var}\left(w^s\right) = \left(L-x\right)^2\pi\left(1-\pi\right)$$

La decisión de asegurarse:

$$\max_x E\left[u\left(w^s\right)\right]$$

Mercado de activos financieros

m	Renta inicial
a	Cantidad a invertir en el activo con riesgo
R	Rentabilidad que proporciona cada activo
w	Riqueza final (después de realizar la inversión)

Activo seguro (bono): R_0

Activo con riesgo: $R_A \begin{cases} R_1 & \text{prob. } \pi \\ R_2 & \text{prob. } 1-\pi \end{cases}$

$$w \begin{cases} \left(m-a\right)R_0 + aR_1 & \text{prob. } \pi \\ \left(m-a\right)R_0 + aR_2 & \text{prob. } 1-\pi \end{cases} \quad \rightarrow \quad \max_a E\left[u\left(w\right)\right]$$

Principio de diversificación:

$$P_{R\setminus M} \approx -\frac{1}{2}\frac{u''\left(\bar{m}+\bar{r}\right)}{u'\left(\bar{m}+\bar{r}\right)}\left(\operatorname{Var}\left(r\right) + 2\operatorname{Cov}\left(m,r\right)\right)$$

TEMA 3: INFORMACIÓN Y COMPORTAMIENTO ECONÓMICO

Modelo de búsqueda secuencial

Regla de parada óptima (RPO):

$$IMa = CMa \quad \rightarrow \quad \left[p^* - E\left(p \setminus p \le p^*\right)\right] F\left(p^*\right) = c$$

Nº esperado de visitas:

$$E[n] = \frac{1}{F\left(p^*\right)}$$

Función de distribución:

$$F\left(p^*\right) = \int_0^{p^*} f\left(p\right) dp$$

Función de densidad condicionada:

$$f\left(p \setminus p \le p^*\right) = \frac{f\left(p\right)}{F\left(p^*\right)}$$

Si el precio sigue una distribución uniforme, estas son las f. de densidad y distribución:

$$f\left(p\right) = \frac{1}{p_{\max} - p_{\min}} \qquad F\left(p^*\right) = \frac{p^* - p_{\min}}{p_{\max} - p_{\min}}$$

Modelo de búsqueda en muestras de tamaño fijo

Regla de parada óptima (RPO):

$$IMa = CMa \quad \rightarrow \quad E\left[P_n\right] - E\left[P_{n+1}\right] = c$$

Función de distribución de p_n:

$$G\left(p_n\right) = 1 - \left(1 - F\left(p_n\right)\right)^n$$

Modelo de Salop y Stiglitz

- $p \in \left[p_{\min}, p_{\max}\right]$, siendo p_{max} el precio de reserva de los consumidores.
- *n* empresas, de las cuales:
  - *k* es el número de empresas que venden a p_{min}.
  - El resto de empresas venden a p_{max}.[1]
- *N* consumidores, de los cuales:
  - $\theta \in [0,1]$ es el porcentaje de consumidores informados.
  - Los consumidores informados sólo compran a $p = p_{min}$.
  - Los consumidores desinformados compran a $p <= p_{max}$.

Cantidad vendida por cada empresa:

$$q\left(p\right) = \begin{cases} \dfrac{\left(1-\theta\right)N}{n} + \dfrac{\theta N}{k} & \text{si } p = p_{\min} \\ \dfrac{\left(1-\theta\right)N}{n} & \text{si } p = p_{\max} \end{cases}$$

Condiciones de equilibrio:

$$p_{\min} = CMa\left(q\left(p_{\min}\right)\right) \qquad \pi\left(p_{\min}\right) = \pi\left(p_{\max}\right)$$

[1] Vender a un precio $p_{min} < p < p_{max}$ no es óptimo en este modelo, ya que los consumidores desinformados están dispuestos a pagar p_{max} de todos modos.