TEMA 2: MODELO DE SOLOW

Notación:

$$y = \frac{Y}{AL} \qquad k = \frac{K}{AL} \qquad\qquad n = \frac{\dot{L}}{L} \qquad g = \frac{\dot{A}}{A}$$

F. producción general:

$$Y = F\left(K, AL\right)$$

$$y = f\left(k\right)$$

F. producción Cobb-Douglas:

$$Y = K^{\alpha}\left(AL\right)^{1-\alpha}$$

$$y = k^{\alpha}$$

Ecuación dinámica del capital:

$$\dot{K} = I - \delta K$$

$$\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K}{AL}\right)}{dt} = \left(\ldots\right) = sf\left(k\right) - \left(n + \delta + g\right)k$$

$$\dot{k} = 0 \quad \rightarrow \quad k^* = \left(\ldots\right) = \left(\frac{s}{n + \delta + g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}}$$

TEMA 3: MODELO DE CRECIMIENTO CON CAPITAL HUMANO

H = stock de formación/educación

2 tipos de ahorro: s_K (para capital físico), s_H (para inversión en capital humano).

Consideramos que el capital no se deprecia: $\dot{K} = s_K Y \quad \dot{H} = s_H Y$

Función de producción:

$$Y = Y(K, AL, H) = K^{\alpha} H^{\beta} (AL)^{1-\alpha-\beta} \qquad \alpha + \beta + (1-\alpha-\beta) = 1 \rightarrow \text{rdtos. ctes.}$$

$$y = \frac{Y}{AL} = \left(\frac{K}{AL}\right)^{\alpha} \left(\frac{H}{AL}\right)^{\beta} = k^{\alpha} h^{\beta}$$

Ecuación de $\dot{k}$:

$$\dot{k} = \frac{d\left(\frac{K}{AL}\right)}{dx} = (\ldots) = s_K k^{\alpha} h^{\beta} - (n+g)k$$

Ecuación de $\dot{k} = 0$:

$$k\big|_{\dot{k}=0} = \left(\frac{s_K h^{\beta}}{n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha}} \qquad \left.\frac{\delta k}{\delta h}\right|_{\dot{k}=0} > 0 \qquad \left.\frac{\delta^2 k}{\delta h^2}\right|_{\dot{k}=0} < 0$$

Ecuación de $\dot{h}$:

$$\dot{h} = \frac{d\left(\frac{H}{AL}\right)}{dx} = (\ldots) = s_H k^{\alpha} h^{\beta} - (n+g)h$$

Ecuación de $\dot{h} = 0$:

$$h\big|_{\dot{h}=0} = \left(\frac{s_H k^{\alpha}}{n+g}\right)^{\frac{1}{1-\beta}} \qquad k\big|_{\dot{h}=0} = \left(\frac{n+g}{s_H}\right)^{\frac{1}{\alpha}} h^{\frac{1-\beta}{\alpha}} \qquad \left.\frac{\delta k}{\delta h}\right|_{\dot{h}=0} > 0 \qquad \left.\frac{\delta^2 k}{\delta h^2}\right|_{\dot{h}=0} > 0$$

Análisis de estabilidad y equilibrio global

Sea $k_0^* \in \dot{k} = 0$:

$k > k_0^* \rightarrow \dot{k} < 0 \qquad k < k_0^* \rightarrow \dot{k} > 0$

Por tanto, $\dot{k} = 0$ es cjto. de e.e. estables.

Sea $h_0^* \in \dot{h} = 0$:

$h > h_0^* \rightarrow \dot{h} < 0 \qquad h < h_0^* \rightarrow \dot{h} > 0$

Por tanto, $\dot{h} = 0$ es cjto. de e.e. estables.

Resolviendo el sistema de $\dot{k} = 0$, $\dot{h} = 0$, se obtiene el equilibrio global.

$$k^* = \left(\frac{s_H^{\beta} s_K^{1-\beta}}{n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \qquad h^* = \left(\frac{s_K^{\alpha} s_H^{1-\alpha}}{n+g}\right)^{\frac{1}{1-\alpha-\beta}} \qquad y^* = s_K^{\frac{\alpha}{1-\alpha-\beta}} s_H^{\frac{\beta}{1-\alpha-\beta}} (n+g)^{\frac{-(\alpha+\beta)}{1-\alpha-\beta}}$$

TEMA 4: MODELO DE CRECIMIENTO ENDÓGENO

Notación:

a_K : proporción de capital destinado al sector I+D.

a_L : proporción de trabajadores destinados al sector I+D.

Sector de bienes:

$$Y = \left((1-a_K)K\right)^{\alpha}\left(A(1-a_L)L\right)^{1-\alpha} \qquad \dot{K} = I = sY$$

Sector de I+D:

$$\dot{A} = B(a_K K)^{\beta}(a_L L)^{\gamma} A^{\theta}$$

Tasa de crecimiento de A

$$g_A = \frac{\dot{A}}{A} = B(a_K K)^{\beta}(a_L L)^{\gamma} A^{\theta-1} = c_A A^{\theta-1}$$

Tomando logaritmos y derivando respecto de t:

$$\dot{g}_A = g_A\left(\beta g_K + \gamma n + (\theta-1)g_A\right)$$

$$\dot{g}_A = 0 \quad \rightarrow \quad g_A = \frac{\gamma n}{1-\theta} + \frac{\beta}{1-\theta} g_K$$

Tasa de crecimiento de K

$$g_K = \frac{\dot{K}}{K} = s(1-a_K)^{\alpha}(1-a_L)^{1-\alpha} K^{\alpha-1}A^{1-\alpha}L^{1-\alpha} = c_K K^{\alpha-1}A^{1-\alpha}L^{1-\alpha}$$

Tomando logaritmos y derivando respecto de t:

$$\dot{g}_K = g_K(1-\alpha)(g_A + n - g_K)$$

$$\dot{g}_K = 0 \quad \rightarrow \quad g_A + n = g_K$$