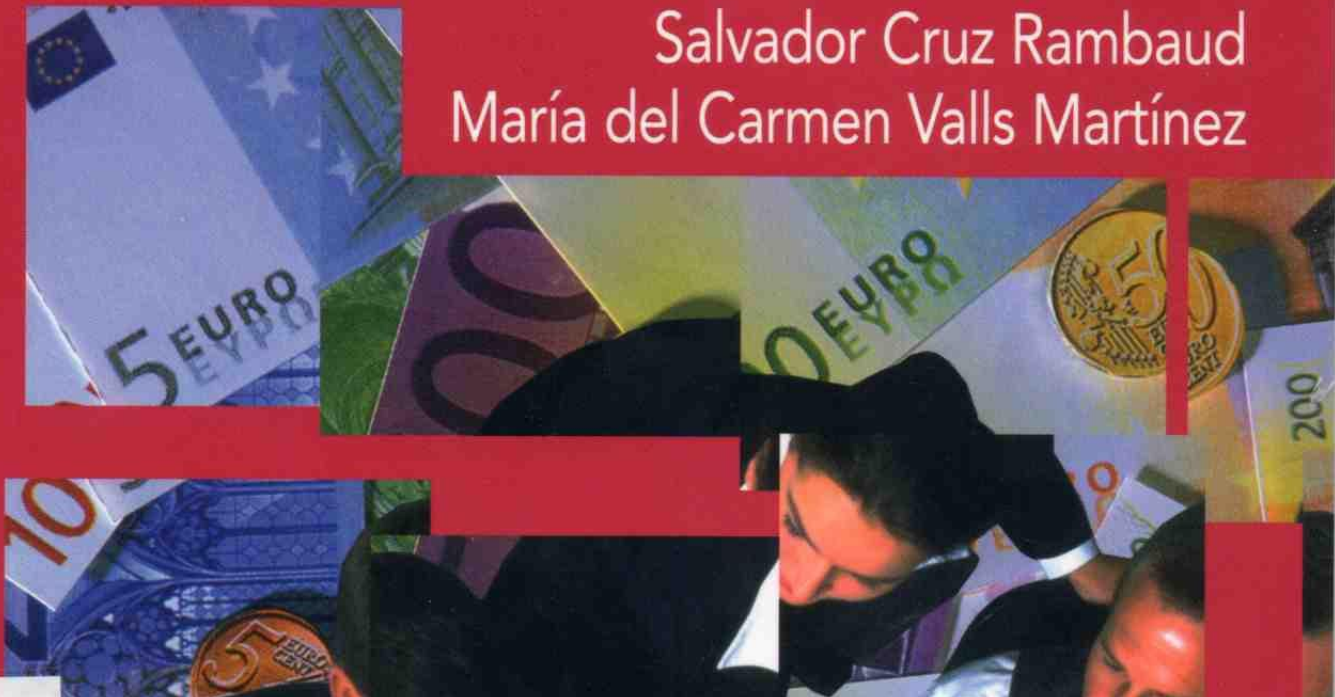
3.ª edición

Introducción a las matemáticas financieras

Guía del alumno

Salvador Cruz Rambaud
María del Carmen Valls Martínez



PIRÁMIDE

Índice

SECCIÓN PRIMERA

Conceptos básicos

SECCIÓN SEGUNDA

Leyes financieras clásicas

SECCIÓN TERCERA

Rentas financieras

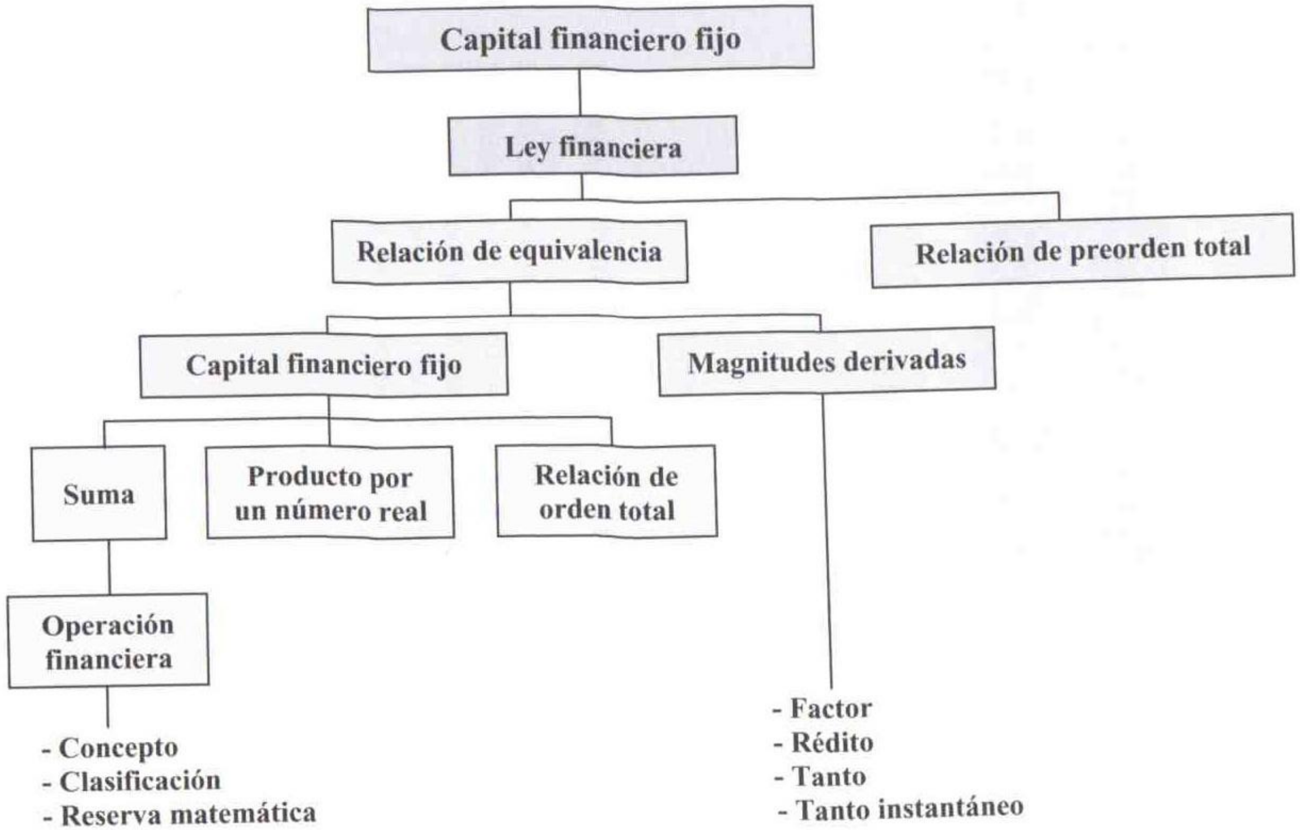
SECCIÓN CUARTA

Operaciones de constitución

SECCIÓN QUINTA

Operaciones de amortización

SECCIÓN PRIMERA: CONCEPTOS BÁSICOS


Capital financiero fijo
Ley financiera
Relación de equivalencia
Relación de preorden total
Capital financiero fijo
Magnitudes derivadas
Suma
Producto por un número real
Relación de orden total
Operación financiera
- Concepto
- Clasificación
- Reserva matemática
- Factor
- Rédito
- Tanto
- Tanto instantáneo

1 Fundamentos de decisión financiera

1.1. CAPITAL FINANCIERO FIJO

Par ordenado de números reales (C, t).

Elementos	Cuantía, C
	Vencimiento, t
Tipos	Acreedor
	Deudor
Representación gráfica	Simplificada
	Esquemática

1.2. ESPACIO FINANCIERO

$$E = \{(C,t) / C \in \Re; t \in \Re\} = \Re \times \Re = \Re^2 .$$

1.3. LEY FINANCIERA

$$F : \Re^3 \to \Re / (C,t,p) \mapsto F(C,t,p) .$$

Condiciones	$F(C,t,p) = C \cdot F(1,t,p) = C \cdot F(t,p)$	Dominio temporal
	$F(t,p) > 0$	
	$F(t,t) = 1$	
	$\frac{\partial F(t,p)}{\partial t} < 0$ y $\frac{\partial F(t,p)}{\partial p} > 0$	
	F continua respecto de t y de p separadamente	

1.4. RELACIÓN DE EQUIVALENCIA ENTRE CAPITALES FINANCIEROS FIJOS

$$(C,t) \sim_{F_p} (C',t') \Leftrightarrow C \cdot F(t,p) = C' \cdot F(t',p).$$

Propiedades	Reflexiva	Clases de equivalencia
	Simétrica	
	Transitiva	

1.5. RELACIONES DE PREFERENCIA ENTRE CAPITALES FINANCIEROS

$$(C,t) \preceq_{F_p} (C',t') \Leftrightarrow C \cdot F(t,p) \leq C' \cdot F(t',p).$$

Propiedades	Reflexiva	Orden total
	Antisimétrica	
	Transitiva	
	Conexa	

1.6. OPERACIONES ENTRE CAPITALES FINANCIEROS

1.6.1. Suma financiera

$$(C,t)+(C',t')=(C'',t'') \Leftrightarrow C\cdot F(t,p)+C'\cdot F(t',p)=C''\cdot F(t'',p).$$

Propiedades	Asociativa	Grupo abeliano
	Conmutativa	
	Elemento neutro	
	Elemento opuesto	

1.6.2. Producto de un capital financiero por un número real

$$\alpha\cdot(C,t)=(C',t') \Leftrightarrow \alpha\cdot C\cdot F(t,p)=C'\cdot F(t',p).$$

Propiedades	Pseudoasociativa	Espacio vectorial
	Distributiva respecto de la suma de capitales financieros	
	Distributiva respecto de la suma de números reales	
	Elemento unidad	

2 Operaciones financieras

2.1. INTRODUCCIÓN

Diremos que $\boldsymbol{A}$ y $\boldsymbol{B}$ son equivalentes según la ley financiera F en el punto p y escribiremos $\boldsymbol{A} \sim_{F_p} \boldsymbol{B}$ si:

$$\sum_{i=1}^{n} C_i F(t_i, p) = \sum_{j=1}^{m} C'_j F(t'_j, p).$$

2.2. CONCEPTO DE OPERACIÓN FINANCIERA

$$\boldsymbol{O} = \{\boldsymbol{P}, \boldsymbol{C}, F_p\}.$$

Elementos	Prestación $\boldsymbol{P} = \{(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_n, t_n)\}$
	Contraprestación $\boldsymbol{C} = \{(C'_1, t'_1), (C'_2, t'_2), \cdots, (C'_m, t'_m)\}$
	Una ley financiera de valoración en p, F_p, tal que $\boldsymbol{C} \sim_{F_p} \boldsymbol{P}$

2.3. CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

Grado de certeza de los capitales	Ciertas
	Financiero-aleatorias
Grado de conocimiento de los capitales	Predeterminadas
	Posdeterminadas

Grado de liquidez interna de la operación	Con liquidez interna total
	Con liquidez interna parcial o condicionada
Duración de la operación	A corto plazo
	A largo plazo
Cardinales de $\boldsymbol{P}$ y de $\boldsymbol{C}$	Simples
	Compuestas
Posición relativa del punto p	De capitalización
	De descuento
	Mixtas
Evolución crediticia de la operación	De crédito unilateral
	De crédito bilateral

2.4. RESERVA MATEMÁTICA O SALDO FINANCIERO DE UNA OPERACIÓN

Cuantía que ha de entregar la parte que ha entregado menos para restablecer el equilibrio financiero de la operación.

Métodos	Retrospectivo: $R_\tau = S_1 - S_1'$	Derecha
		Izquierda
	Prospectivo: $R_\tau = S_2' - S_2$	Derecha
		Izquierda
Propiedades	$R_\tau^+ = R_\tau^- + C_\tau$, si $(C_\tau, \tau) \in \boldsymbol{P}$	
	$R_\tau^+ = R_\tau^- - C_\tau'$, si $(C_\tau', \tau) \in \boldsymbol{C}$	
	$R_{t_1}^- = 0$ y $R_{t_1}^+ = C_1$	
	$R_{t_f}^+ = 0$ y $R_{t_f}^- = \begin{cases} -C_n, t_f = t_n \\ C_m', t_f = t_m' \end{cases}$	

3 Magnitudes financieras

3.1. INTRODUCCIÓN

La *cuantía* (C), expresada en unidades monetarias, y el *vencimiento* (t), expresado en unidades de tiempo, son las *magnitudes fundamentales*. A partir de ellas vamos a definir las *magnitudes derivadas*.

3.2. EL FACTOR FINANCIERO

3.2.1. El factor financiero de desplazamiento positivo o a la derecha

$f(t_1,t_2,p)=\dfrac{F(t_1,p)}{F(t_2,p)}=\dfrac{C_2}{C_1}$	
Capitalización	$u(t_1,t_2,p)=\dfrac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)}=\dfrac{C_2}{C_1}$
Contradescuento	$v^*(t_1,t_2,p)=\dfrac{A(t_1,p)}{A(t_2,p)}=\dfrac{C_2}{C_1}$

3.2.2. El factor financiero de desplazamiento negativo o a la izquierda

$f^*(t_1,t_2,p)=\dfrac{F(t_2,p)}{F(t_1,p)}=\dfrac{C_1}{C_2}$	
Contracapitalización	$u^*(t_1,t_2,p)=\dfrac{L(t_2,p)}{L(t_1,p)}=\dfrac{C_1}{C_2}$
Descuento	$v(t_1,t_2,p)=\dfrac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)}=\dfrac{C_1}{C_2}$

3.3. EL RÉDITO

3.3.1. El rédito de desplazamiento positivo o a la derecha

$r(t_1,t_2,p)=f(t_1,t_2,p)-1=\begin{cases}\dfrac{F(t_1,p)}{F(t_2,p)}-1=\dfrac{F(t_1,p)-F(t_2,p)}{F(t_2,p)}\\ \dfrac{C_2}{C_1}-1=\dfrac{C_2-C_1}{C_1}\end{cases}$	
Capitalización	$i(t_1,t_2,p)=u(t_1,t_2,p)-1=\begin{cases}\dfrac{L(t_1,p)}{L(t_2,p)}-1=\dfrac{L(t_1,p)-L(t_2,p)}{L(t_2,p)}\\ \dfrac{C_2}{C_1}-1=\dfrac{C_2-C_1}{C_1}\end{cases}$
Contradescuento	$d^*(t_1,t_2,p)=v^*(t_1,t_2,p)-1=\begin{cases}\dfrac{A(t_1,p)}{A(t_2,p)}-1=\dfrac{A(t_1,p)-A(t_2,p)}{A(t_2,p)}\\ \dfrac{C_2}{C_1}-1=\dfrac{C_2-C_1}{C_1}\end{cases}$

3.3.2. El rédito de desplazamiento negativo o a la izquierda

$$r^*(t_1,t_2,p)=1-f^*(t_1,t_2,p)=\begin{cases}1-\dfrac{F(t_2,p)}{F(t_1,p)}=\dfrac{F(t_1,p)-F(t_2,p)}{F(t_1,p)}\\ 1-\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{C_2-C_1}{C_2}\end{cases}$$	
Contracapitalización	$$i^*(t_1,t_2,p)=1-u^*(t_1,t_2,p)=\begin{cases}1-\dfrac{L(t_2,p)}{L(t_1,p)}=\dfrac{L(t_1,p)-L(t_2,p)}{L(t_1,p)}\\ 1-\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{C_2-C_1}{C_2}\end{cases}$$
Descuento	$$d(t_1,t_2,p)=1-v(t_1,t_2,p)=\begin{cases}1-\dfrac{A(t_2,p)}{A(t_1,p)}=\dfrac{A(t_1,p)-A(t_2,p)}{A(t_1,p)}\\ 1-\dfrac{C_1}{C_2}=\dfrac{C_2-C_1}{C_2}\end{cases}$$

3.4. EL TANTO

3.4.1. El tanto de desplazamiento positivo o a la derecha

$$\tau(t_1,t_2,p)=\frac{r(t_1,t_2,p)}{t_2-t_1}=\begin{cases}\dfrac{F(t_1,p)-F(t_2,p)}{F(t_2,p)\cdot(t_2-t_1)}\\ \dfrac{C_2-C_1}{C_1\cdot(t_2-t_1)}\end{cases}$$	
Capitalización	$$\rho(t_1,t_2,p)=\frac{i(t_1,t_2,p)}{t_2-t_1}=\begin{cases}\dfrac{L(t_1,p)-L(t_2,p)}{L(t_2,p)\cdot(t_2-t_1)}\\ \dfrac{C_2-C_1}{C_1\cdot(t_2-t_1)}\end{cases}$$

Contradescuento	$\delta^*(t_1,t_2,p)=\dfrac{d^*(t_1,t_2,p)}{t_2-t_1}=\begin{cases}\dfrac{A(t_1,p)-A(t_2,p)}{A(t_2,p)\cdot(t_2-t_1)}\\ \dfrac{C_2-C_1}{C_1\cdot(t_2-t_1)}\end{cases}$

3.4.2. El tanto de desplazamiento negativo o a la izquierda

$\tau^*(t_1,t_2,p)=\dfrac{r^*(t_1,t_2,p)}{t_2-t_1}=\begin{cases}\dfrac{F(t_1,p)-F(t_2,p)}{F(t_1,p)\cdot(t_2-t_1)}\\ \dfrac{C_2-C_1}{C_2\cdot(t_2-t_1)}\end{cases}$	
Contracapitalización	$\rho^*(t_1,t_2,p)=\dfrac{i^*(t_1,t_2,p)}{t_2-t_1}=\begin{cases}\dfrac{L(t_1,p)-L(t_2,p)}{L(t_1,p)\cdot(t_2-t_1)}\\ \dfrac{C_2-C_1}{C_2\cdot(t_2-t_1)}\end{cases}$
Descuento	$\delta(t_1,t_2,p)=\dfrac{d(t_1,t_2,p)}{t_2-t_1}=\begin{cases}\dfrac{A(t_1,p)-A(t_2,p)}{A(t_1,p)\cdot(t_2-t_1)}\\ \dfrac{C_2-C_1}{C_2\cdot(t_2-t_1)}\end{cases}$

3.4.3. El tanto instantáneo

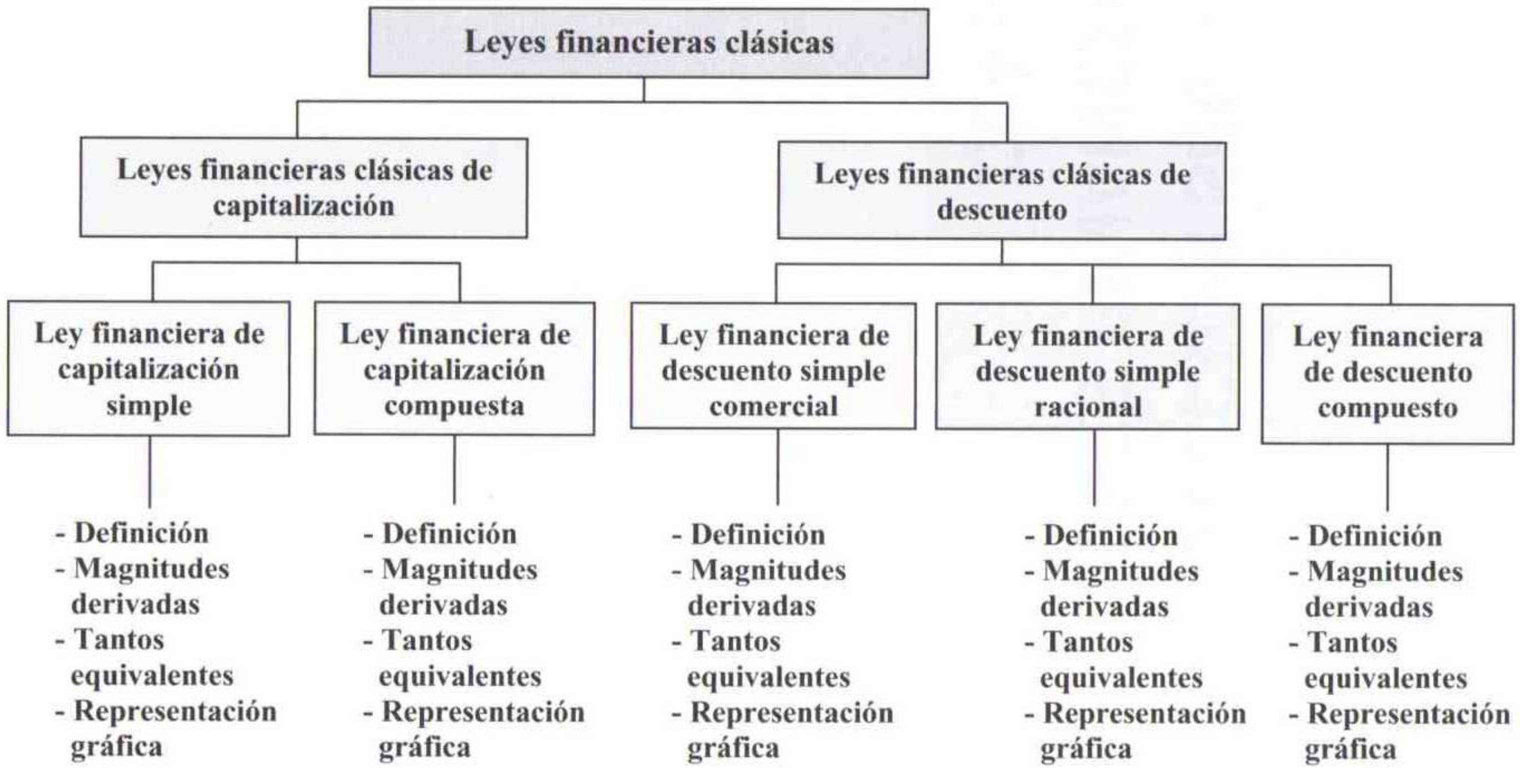
$\tau(t,p)=\tau^*(t,p)=-\dfrac{\partial \ln F(t,p)}{\partial t}$	
Capitalización	$\rho(t,p)=\rho^*(t,p)=-\dfrac{\partial \ln L(t,p)}{\partial t}$
Descuento	$\delta(t,p)=\delta^*(t,p)=-\dfrac{\partial \ln A(t,p)}{\partial t}$

	Ley financiera	Factor financiero
Capitalización	$L(t,p)=e^{\int_{t}^{p}\rho(x,p)dx}$	$u(t_1,t_2,p)=e^{\int_{t_1}^{t_2}\rho(x,p)dx}$
Descuento	$A(t,p)=e^{-\int_{p}^{t}\delta(x,p)dx}$	$v(t_1,t_2,p)=e^{-\int_{t_1}^{t_2}\delta(x,p)dx}$

3.5. INTERÉS Y DESCUENTO

	Pospagable	Prepagable
Interés	$I=C_1\cdot i(t_1,t_2,p)$	$I^*=C_2\cdot i^*(t_1,t_2,p)$
Descuento	$D^*=C_1\cdot d^*(t_1,t_2,p)$	$D=C_2\cdot d(t_1,t_2,p)$

SECCIÓN SEGUNDA: LEYES FINANCIERAS CLÁSICAS



Leyes financieras clásicas
Leyes financieras clásicas de capitalización
Leyes financieras clásicas de descuento
Ley financiera de capitalización simple
Ley financiera de capitalización compuesta
Ley financiera de descuento simple comercial
Ley financiera de descuento simple racional
Ley financiera de descuento compuesto
- Definición
- Magnitudes derivadas
- Tantos equivalentes
- Representación gráfica
- Definición
- Magnitudes derivadas
- Tantos equivalentes
- Representación gráfica
- Definición
- Magnitudes derivadas
- Tantos equivalentes
- Representación gráfica
- Definición
- Magnitudes derivadas
- Tantos equivalentes
- Representación gráfica
- Definición
- Magnitudes derivadas
- Tantos equivalentes
- Representación gráfica

4 Leyes financieras clásicas de capitalización

4.1. LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE

$L(t, p) = 1 + i(p - t)$, donde $t \leq p$ e $i > 0$.

Tanto efectivo anual y tanto equivalente por *k-ésimo* de año	$i = i_{(k)} \cdot k$
	$i_{(k)} = \dfrac{i}{k}$

4.2. LEY FINANCIERA DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

$L(t, p) = (1 + i)^{p-t}$, donde $t \leq p$ e $i > 0$.

Tanto efectivo anual y tanto equivalente por *k-ésimo* de año	$i = (1 + i_{(k)})^k - 1$
	$i_{(k)} = (1 + i)^{1/k} - 1$
Tanto nominal anual convertible por *k-ésimo* de año y tanto equivalente por *k-ésimo* de año	$j_{(k)} = k \cdot i_{(k)}$
	$i_{(k)} = \dfrac{j_{(k)}}{k}$
Relación entre los tantos nominal convertible por *k-esimo* de año y efectivo anual	$i \xrightarrow{i_{(k)}=(1+i)^{1/k}-1} i_{(k)} \xrightarrow{j_{(k)}=k \cdot i_{(k)}} j_{(k)}$ $i \xleftarrow[i=(1+i_{(k)})^k-1]{} i_{(k)} \xleftarrow[i_{(k)}=\frac{j_{(k)}}{k}]{} j_{(k)}$

4.3. COMPARACIÓN ENTRE LAS LEYES FINANCIERAS DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE Y DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

<table>
<tr><td colspan="3">$L_1(z) = 1 + i_1 \cdot z$ y $L_2(z) = (1 + i_2)^z$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$i_1 = i_2$</td><td colspan="2">Si $z = 0 \Rightarrow L_1(0) = L_2(0)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si $0 < z < 1 \Rightarrow L_1(z) > L_2(z)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si $z = 1 \Rightarrow L_1(1) = L_2(1)$</td></tr>
<tr><td colspan="2">Si $z > 1 \Rightarrow L_1(z) < L_2(z)$</td></tr>
<tr><td rowspan="6">$i_1 \neq i_2$</td><td>$i_1 = \ln(1 + i_2)$</td><td>$L_1(z) < L_2(z)$, para todo $z > 0$</td></tr>
<tr><td>$i_1 < \ln(1 + i_2)$</td><td>$L_1(z) < L_2(z)$, para todo $z > 0$</td></tr>
<tr><td rowspan="4">$i_1 > \ln(1 + i_2)$</td><td>Si $z = 0 \Rightarrow L_1(0) = L_2(0)$</td></tr>
<tr><td>Si $0 < z < z_0 \Rightarrow L_1(z) > L_2(z)$</td></tr>
<tr><td>Si $z = z_0 \Rightarrow L_1(z_0) = L_2(z_0)$</td></tr>
<tr><td>Si $z > z_0 \Rightarrow L_1(z) < L_2(z)$</td></tr>
</table>

5 Leyes financieras clásicas de descuento

5.1. LEY FINANCIERA DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

$A(t, p) = 1 - d(t - p)$, donde $t \geq p$ y $d > 0$.

Tanto efectivo anual y tanto equivalente por *k-ésimo* de año	$d = d_{(k)} \cdot k$
	$d_{(k)} = \frac{d}{k}$
Relación entre los tantos de descuento simple comercial y capitalización simple	$i = \frac{d}{1 - dz}$
	$d = \frac{i}{1 + iz}$

5.2. LEY FINANCIERA DE DESCUENTO SIMPLE RACIONAL O MATEMÁTICO

$$A(t, p) = \frac{1}{1 + i(t - p)}, \text{ donde } t \geq p \text{ e } i > 0.$$

Tanto efectivo anual y tanto equivalente por *k-ésimo* de año	$i = i_{(k)} \cdot k$
	$i_{(k)} = \dfrac{i}{k}$
Relación entre los tantos de descuento simple comercial y descuento simple racional	$i = \dfrac{d}{1-dz}$
	$d = \dfrac{i}{1+iz}$

5.3. COMPARACIÓN ENTRE LAS LEYES FINANCIERAS DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL Y DE DESCUENTO SIMPLE RACIONAL O MATEMÁTICO

$$A_2(z) = \frac{1}{1+iz} > A_1(z) = 1 - iz\,.$$

5.4. LEY FINANCIERA DE DESCUENTO COMPUESTO

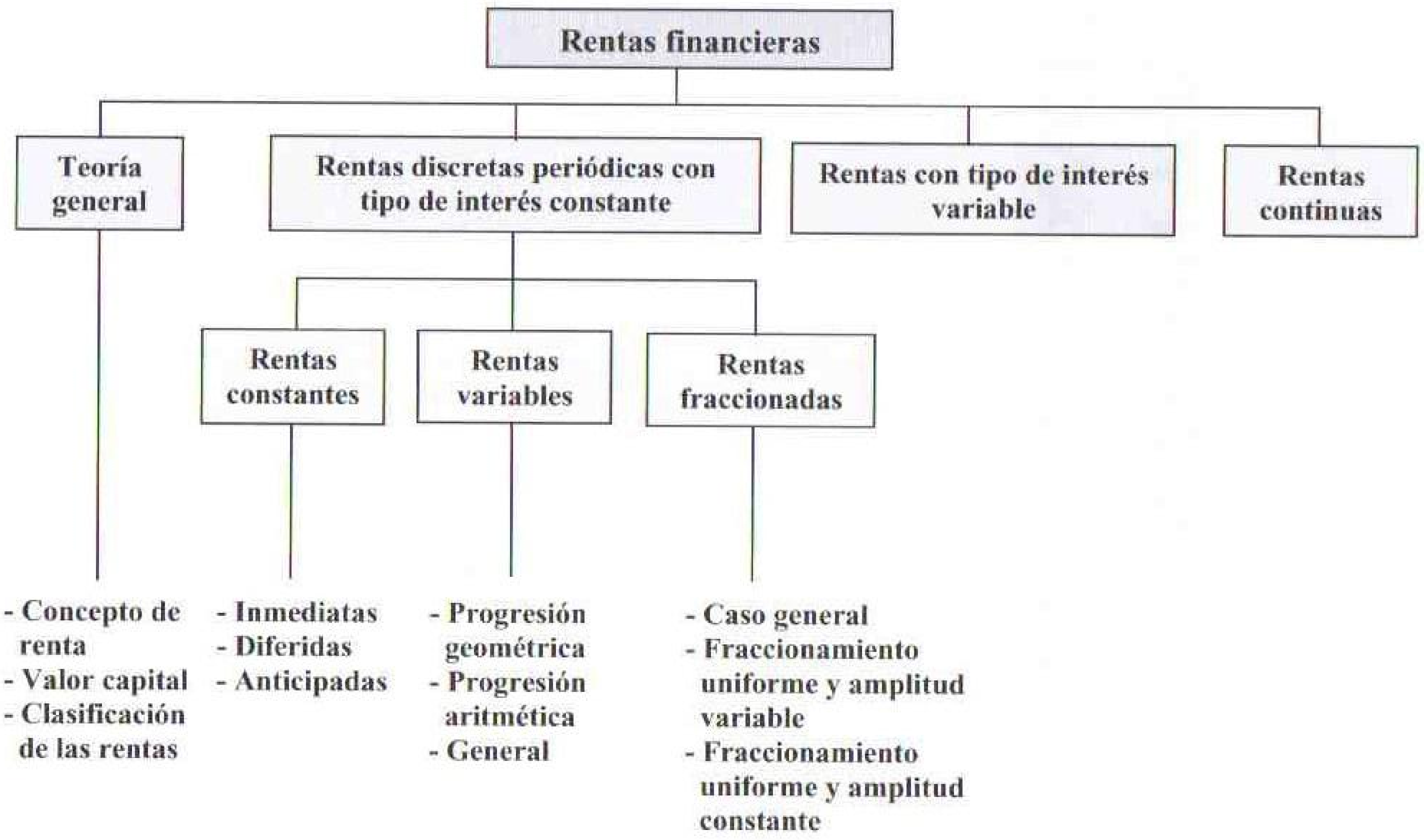
$$A(t,p) = (1+i)^{-(t-p)} = (1-d)^{t-p}\text{, donde } t \geq p \text{ e } i,d > 0.$$

Tanto efectivo anual y tanto equivalente por *k-ésimo* de año	$\begin{cases} i = (1+i_{(k)})^k - 1 \\ i_{(k)} = (1+i)^{1/k} - 1 \end{cases}$
	$\begin{cases} d = 1-(1-d_{(k)})^k \\ d_{(k)} = 1-(1-d)^{1/k} \end{cases}$
Relación entre los tantos de descuento compuesto y capitalización compuesta	$i = \dfrac{d}{1-d}$
	$d = \dfrac{i}{1+i}$

5.5. COMPARACIÓN ENTRE LAS LEYES FINANCIERAS DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL, RACIONAL Y COMPUESTO

$A_1(z)=1-iz$	$A_2(z)=\dfrac{1}{1+iz}$	$A_3(z)=(1+i)^{-z}$
Si $z=0 \Rightarrow A_1(0)=A_2(0)=A_3(0)=1$		
Si $0<z<1 \Rightarrow A_1(z)<A_2(z)<A_3(z)$		
Si $z=1 \Rightarrow A_1(1)<A_2(1)=A_3(1)$		
Si $1<z<1/d \Rightarrow A_1(z)<A_3(z)<A_2(z)$		
Si $z>1/d \Rightarrow A_3(z)<A_2(z)$		

SECCIÓN TERCERA: RENTAS FINANCIERAS


Rentas financieras
Teoría general
Rentas discretas periódicas con tipo de interés constante
Rentas con tipo de interés variable
Rentas continuas
Rentas constantes
Rentas variables
Rentas fraccionadas
- Concepto de renta
- Valor capital
- Clasificación de las rentas
- Inmediatas
- Diferidas
- Anticipadas
- Progresión geométrica
- Progresión aritmética
- General
- Caso general
- Fraccionamiento uniforme y amplitud variable
- Fraccionamiento uniforme y amplitud constante

6 Teoría general de rentas financieras

6.1. CONCEPTO DE RENTA FINANCIERA

Terna $R = \{P, C, F_p\}$.

6.2. VALOR CAPITAL O FINANCIERO DE UNA RENTA

$$V_h = \sum_{j \in J} c_j \frac{F(\tau_j, p)}{F(h, p)} \; .$$

Propiedades	Linealidad respecto de las cuantías
	Descomposición en suma de cuantías más rendimientos
	Monotonía
	Aditividad respecto al tiempo

6.3. CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS

Cuantía de los capitales	Constantes	Unitarias
		No unitarias
	Variables	
Vencimiento de los términos	Prepagables	
	Pospagables	

<table>
<tr><td rowspan="2">Duración de la renta</td><td colspan="2">Temporales</td></tr>
<tr><td colspan="2">Perpetuas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">Amplitud de los períodos</td><td rowspan="2">Discretas</td><td>Periódicas</td></tr>
<tr><td>No periódicas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Continuas</td></tr>
<tr><td rowspan="3">El momento de valoración</td><td colspan="2">Inmediatas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Diferidas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Anticipadas</td></tr>
<tr><td rowspan="2">Certeza de los elementos de la renta</td><td colspan="2">Ciertas</td></tr>
<tr><td colspan="2">Aleatorias</td></tr>
</table>

7 Rentas constantes

7.1. RENTAS INMEDIATAS

7.1.1. Rentas pospagables

	Renta unitaria	Renta constante
Valor actual renta temporal	$a_{\overline{n}\|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i} = \dfrac{1-v^n}{i}$	$(Va)_{\overline{n}\|i} = c\, a_{\overline{n}\|i}$
Valor actual renta perpetua	$a_{\overline{\infty}\|i} = \dfrac{1}{i}$	$(Va)_{\overline{\infty}\|i} = c\, a_{\overline{\infty}\|i}$
Valor final renta temporal	$s_{\overline{n}\|i} = \dfrac{(1+i)^n - 1}{i} = a_{\overline{n}\|i}(1+i)^n$	$(Vs)_{\overline{n}\|i} = c\, s_{\overline{n}\|i}$

7.1.2. Rentas prepagables

	Renta unitaria	Renta constante
Valor actual renta temporal	$\ddot{a}_{\overline{n}\|i} = (1+i)\, a_{\overline{n}\|i}$ $\ddot{a}_{\overline{n}\|i} = a_{\overline{n-1}\|i} + 1$	$(\ddot{V}a)_{\overline{n}\|i} = c\, \ddot{a}_{\overline{n}\|i}$
Valor actual renta perpetua	$\ddot{a}_{\overline{\infty}\|i} = (1+i)\, a_{\overline{\infty}\|i} = a_{\overline{\infty}\|i} + 1$	$(\ddot{V}a)_{\overline{\infty}\|i} = c\, \ddot{a}_{\overline{\infty}\|i}$
Valor final renta temporal	$\ddot{s}_{\overline{n}\|i} = \ddot{a}_{\overline{n}\|i} (1+i)^n = (1+i)\, s_{\overline{n}\|i}$ $\ddot{s}_{\overline{n}\|i} = s_{\overline{n+1}\|i} - 1$	$(\ddot{V}s)_{\overline{n}\|i} = c\, \ddot{s}_{\overline{n}\|i}$

7.2. RENTAS DIFERIDAS

7.2.1. Rentas pospagables

	Renta unitaria	Renta constante
Valor actual renta temporal	$d/a_{\overline{n}\|i} = (1+i)^{-d}\, a_{\overline{n}\|i} =$ $= a_{\overline{n+d}\|i} - a_{\overline{d}\|i}$	$d/(Va)_{\overline{n}\|i} = c\, d/a_{\overline{n}\|i}$
Valor actual renta perpetua	$d/a_{\overline{\infty}\|i} = (1+i)^{-d}\, \dfrac{1}{i}$	$d/(Va)_{\overline{\infty}\|i} = c\, d/a_{\overline{\infty}\|i}$

7.2.2. Rentas prepagables

	Renta unitaria	Renta constante
Valor actual renta temporal	$d/\ddot{a}_{\overline{n}\|i} = (1+i)^{-d}\,\ddot{a}_{\overline{n}\|i} =$ $= \ddot{a}_{\overline{n+d}\|i} - \ddot{a}_{\overline{d}\|i} =$ $= a_{\overline{n+d-1}\|i} - a_{\overline{d-1}\|i}$	$d/(\ddot{V}a)_{\overline{n}\|i} = c\, d/\ddot{a}_{\overline{n}\|i}$
Valor actual renta perpetua	$d/\ddot{a}_{\overline{\infty}\|i} = (1+i)^{-d}\,\ddot{a}_{\overline{\infty}\|i}$	$d/(\ddot{V}a)_{\overline{\infty}\|i} = c\, d/\ddot{a}_{\overline{\infty}\|i}$

7.3. RENTAS ANTICIPADAS

7.3.1. Rentas pospagables

	Renta unitaria	Renta constante
Valor final renta temporal	$h/s_{\overline{n}\|i} = (1+i)^{h}\, s_{\overline{n}\|i} =$ $= s_{\overline{n+h}\|i} - s_{\overline{h}\|i}$	$h/(Vs)_{\overline{n}\|i} = c\, h/s_{\overline{n}\|i}$

7.3.2. Rentas prepagables

	Renta unitaria	Renta constante
Valor final renta temporal	$h/\ddot{s}_{\overline{n}\|i} = (1+i)^{h}\, \ddot{s}_{\overline{n}\|i} =$ $= \ddot{s}_{\overline{n+h}\|i} - \ddot{s}_{\overline{h}\|i} =$ $= s_{\overline{n+h+1}\|i} - s_{\overline{h+1}\|i}$	$h/(\ddot{V}s)_{\overline{n}\|i} = c\, h/\ddot{s}_{\overline{n}\|i}$

8 Rentas variables

8.1. RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

8.1.1. Rentas inmediatas

8.1.1.1. Rentas pospagables

	$q \neq 1+i$	$q = 1+i$
Valor actual renta temporal	$A_{(c,q)\overline{n}\mid i} = c\dfrac{1-\left(\dfrac{q}{1+i}\right)^n}{(1+i)-q}$	$A_{(c,1+i)\overline{n}\mid i} = nc(1+i)^{-1}$
Valor actual renta perpetua	$A_{(c,q)\overline{\infty}\mid i} = \dfrac{c}{(1+i)-q}$, si $q<1+i$	–
Valor final renta temporal	$S_{(c,q)\overline{n}\mid i} = A_{(c,q)\overline{n}\mid i}(1+i)^n$	

8.1.1.2. Rentas prepagables

	$q \neq 1+i$	$q = 1+i$
Valor actual renta temporal	$\ddot{A}_{(c,q)\overline{n}\mid i} = (1+i)A_{(c,q)\overline{n}\mid i}$	$\ddot{A}_{(c,1+i)\overline{n}\mid i} = nc$
Valor actual renta perpetua	$\ddot{A}_{(c,q)\overline{\infty}\mid i} = (1+i)A_{(c,q)\overline{\infty}\mid i}$, si $q<1+i$	–
Valor final renta temporal	$\ddot{S}_{(c,q)\overline{n}\mid i} = (1+i)S_{(c,q)\overline{n}\mid i} = \ddot{A}_{(c,q)\overline{n}\mid i}(1+i)^n$	

8.1.2. Rentas diferidas

8.1.2.1. Rentas pospagables

Valor actual renta temporal	$d/A_{(c,q)\overline{n}\mid i} = (1+i)^{-d} A_{(c,q)\overline{n}\mid i}$
Valor actual renta perpetua	$d/A_{(c,q)\overline{\infty}\mid i} = (1+i)^{-d} A_{(c,q)\overline{\infty}\mid i}$, si $q<1+i$

8.1.2.2. Rentas prepagables

Valor actual renta temporal	$d/\ddot{A}_{(c,q)\overline{n}\vert i} = (1+i)^{-d}\,\ddot{A}_{(c,q)\overline{n}\vert i}$
Valor actual renta perpetua	$d/\ddot{A}_{(c,q)\overline{\infty}\vert i} = (1+i)^{-d}\,\ddot{A}_{(c,q)\overline{\infty}\vert i}$, si $q < 1+i$

8.1.3. Rentas anticipadas

8.1.3.1. Rentas pospagables

Valor final renta temporal	$h/S_{(c,q)\overline{n}\vert i} = (1+i)^{h}\,S_{(c,q)\overline{n}\vert i}$

8.1.3.2. Rentas prepagables

Valor final renta temporal	$h/\ddot{S}_{(c,q)\overline{n}\vert i} = (1+i)^{h}\,\ddot{S}_{(c,q)\overline{n}\vert i}$

8.2. RENTAS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

8.2.1. Rentas inmediatas

8.2.1.1. Rentas pospagables

Valor actual renta temporal	$A_{(c,d)\overline{n}\vert i} = \left(c + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}\vert i} - \frac{dnv^{n}}{i}$ $A_{(c,d)\overline{n}\vert i} = \left(c + \frac{d}{i} + dn\right) a_{\overline{n}\vert i} - \frac{dn}{i}$
Valor actual renta perpetua	$A_{(c,d)\overline{\infty}\vert i} = \left(c + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$

Valor final renta temporal	$S_{(c,d)\overline{n}\|i} = A_{(c,d)\overline{n}\|i}(1+i)^n$ $S_{(c,d)\overline{n}\|i} = \left(c + \frac{d}{i}\right)s_{\overline{n}\|i} - \frac{dn}{i}$ $S_{(c,d)\overline{n}\|i} = \left(c + \frac{d}{i} + dn\right)s_{\overline{n}\|i} - \frac{dnv^{-n}}{i}$

8.2.1.2. Rentas prepagables

Valor actual renta temporal	$\ddot{A}_{(c,d)\overline{n}\|i} = (1+i)A_{(c,d)\overline{n}\|i}$
Valor actual renta perpetua	$\ddot{A}_{(c,d)\overline{\infty}\|i} = (1+i)A_{(c,d)\overline{\infty}\|i}$
Valor final renta temporal	$\ddot{S}_{(c,d)\overline{n}\|i} = (1+i)S_{(c,d)\overline{n}\|i} = \ddot{A}_{(c,d)\overline{n}\|i}(1+i)^n$

8.2.2. Rentas diferidas

8.2.2.1. Rentas pospagables

Valor actual renta temporal	$d/A_{(c,d)\overline{n}\|i} = (1+i)^{-d}\,A_{(c,d)\overline{n}\|i}$
Valor actual renta perpetua	$d/A_{(c,d)\overline{\infty}\|i} = (1+i)^{-d}\,A_{(c,d)\overline{\infty}\|i}$

8.2.2.2. Rentas prepagables

Valor actual renta temporal	$d/\ddot{A}_{(c,d)\overline{n}\|i} = (1+i)^{-d}\,\ddot{A}_{(c,d)\overline{n}\|i}$
Valor actual renta perpetua	$d/\ddot{A}_{(c,d)\overline{\infty}\|i} = (1+i)^{-d}\,\ddot{A}_{(c,d)\overline{\infty}\|i}$

8.2.3. Rentas anticipadas

8.2.3.1. Rentas pospagables

Valor final renta temporal	$h/S_{(c,d)\overline{n}\vert i} = (1+i)^h S_{(c,d)\overline{n}\vert i}$

8.2.3.2. Rentas prepagables

Valor final renta temporal	$h/\ddot{S}_{(c,d)\overline{n}\vert i} = (1+i)^h \ddot{S}_{(c,d)\overline{n}\vert i}$

8.3. RENTAS VARIABLES EN GENERAL

8.3.1. Rentas inmediatas

8.3.1.1. Rentas pospagables

Valor actual renta temporal	$(V_0)_{\overline{n}\vert i} = \sum_{s=1}^{n} c_s (1+i)^{-s}$
Valor actual renta perpetua	$(V_0)_{\overline{\infty}\vert i} = \sum_{s=1}^{\infty} c_s (1+i)^{-s}$
Valor final renta temporal	$(V_n)_{\overline{n}\vert i} = \sum_{s=1}^{n} c_s (1+i)^{n-s} = (V_0)_{\overline{n}\vert i} (1+i)^n$

8.3.1.2. Rentas prepagables

Valor actual renta temporal	$(\ddot{V}_0)_{\overline{n}\vert i} = (1+i)(V_0)_{\overline{n}\vert i}$
Valor actual renta perpetua	$(\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}\vert i} = (1+i)(V_0)_{\overline{\infty}\vert i}$
Valor final renta temporal	$(\ddot{V}_n)_{\overline{n}\vert i} = (1+i)^n (\ddot{V}_0)_{\overline{n}\vert i}$

8.3.2. Rentas diferidas

8.3.2.1. Rentas pospagables

Valor actual renta temporal	$d/(V_0)_{\overline{n}\vert i} = (1+i)^{-d}\,(V_0)_{\overline{n}\vert i}$
Valor actual renta perpetua	$d/(V_0)_{\overline{\infty}\vert i} = (1+i)^{-d}\,(V_0)_{\overline{\infty}\vert i}$

8.3.2.2. Rentas prepagables

Valor actual renta temporal	$d/(\ddot{V}_0)_{\overline{n}\vert i} = (1+i)^{-d}\,(\ddot{V}_0)_{\overline{n}\vert i}$
Valor actual renta perpetua	$d/(\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}\vert i} = (1+i)^{-d}\,(\ddot{V}_0)_{\overline{\infty}\vert i}$

8.3.3. Rentas anticipadas

8.3.3.1. Rentas pospagables

Valor final renta temporal	$h/(V_n)_{\overline{n}\vert i} = (1+i)^{h}\,(V_n)_{\overline{n}\vert i}$

8.3.3.2. Rentas prepagables

Valor final renta temporal	$h/(\ddot{V}_n)_{\overline{n}\vert i} = (1+i)^{h}\,(\ddot{V}_n)_{\overline{n}\vert i}$

9 Rentas fraccionadas

9.1. RENTAS INMEDIATAS

9.1.1. Rentas pospagables

9.1.1.1. Caso general

$$(V_0)_{\overline{n}|i}^{(m)} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} c_{j,k} (1+i)^{t_j - t_{j,k}} \right) (1+i)^{-(t_j - t_0)} .$$

9.1.1.2. Fraccionamiento uniforme y amplitud variable

$$(V_0)_{\overline{n}|i}^{(m)} = \sum_{j \in J} c_j \frac{i_j}{j_{j(m)}} (1+i)^{-(t_j - t_0)} .$$

9.1.1.3. Fraccionamiento uniforme y amplitud constante

$$(V_h)_{\overline{n}|i}^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} (V_h)_{\overline{n}|i} .$$

9.1.2. Rentas prepagables

9.1.2.1. Caso general

$$(\ddot{V}_0)^{(m)}_{\overline{n}|i} = \sum_{j \in J} \left(\sum_{k \in K} c_{j,k} (1+i)^{-(t_{j,k-1} - t_{j-1})} \right) (1+i)^{-(t_{j-1} - t_0)} .$$

9.1.2.2. Fraccionamiento uniforme y amplitud variable

$$(\ddot{V}_0)^{(m)}_{\overline{n}|i} = \sum_{j \in J} c_j \frac{i_j (1 + i_{j(m)})}{j_{j(m)} (1 + i_j)} (1+i)^{-(t_{j-1} - t_0)} .$$

9.1.2.3. Fraccionamiento uniforme y amplitud constante

$$(\ddot{V}_h)^{(m)}_{\overline{n}|i} = \frac{i(1 + i_{(m)})}{j_{(m)}} (V_h)_{\overline{n}|i} ,$$

9.2. RENTAS DIFERIDAS Y ANTICIPADAS

Tratamiento similar al analizado en apartados anteriores.

10 Rentas con tipo de interés variable y rentas continuas

10.1. RENTAS CON TIPO DE INTERÉS VARIABLE

$$(V_0)_{\overline{n}|i} = \sum_{j\in J} c_j \prod_{h=1}^{j} (1+i_h)^{-1}.$$

$$(V_0)_{\overline{n}|i} = c\, a_{\overline{r}|i_1} + (1+i_1)^{-r} c\, a_{\overline{s-r}|i_2} + (1+i_1)^{-r}(1+i_2)^{-(s-r)} c\, a_{\overline{n-s}|i_3}.$$

10.2. VALOR FINANCIERO DE UNA RENTA CONTINUA

	Valor actual	Valor final
$F(t,p)$	$(\overline{V}_{t_0})_{\overline{t_0,t_n}\|F_p} = \int_{t_0}^{t_n} \frac{F(t,p)}{F(t_0,p)} C(t)dt$	$(\overline{V}_{t_n})_{\overline{t_0,t_n}\|F_p} = \int_{t_0}^{t_n} \frac{F(t,p)}{F(t_n,p)} C(t)dt$
Capitalización compuesta	$(\overline{V}_{t_0})_{\overline{t_0,t_n}\|i} = \int_{t_0}^{t_n} (1+i)^{-(t-t_0)} C(t)dt$	$(\overline{V}_{t_n})_{\overline{t_0,t_n}\|i} = (\overline{V}_{t_0})_{\overline{t_0,t_n}\|i} \cdot (1+i)^{t_n-t_0} = \int_{t_0}^{t_n} (1+i)^{t_n-t} C(t)dt$
$C(t)=1$	$\overline{a}_{\overline{t_0,t_n}\|i} = \frac{1-(1+i)^{-(t_n-t_0)}}{\rho}$	$\overline{s}_{\overline{t_0,t_n}\|i} = \overline{a}_{\overline{t_0,t_n}\|i} \cdot (1+i)^{t_n-t_0} = \frac{(1+i)^{t_n-t_0}-1}{\rho}$
$t_n - t_0 = n$	$\overline{a}_{\overline{n}\|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\rho} = \frac{i}{\rho} a_{\overline{n}\|i}$	$\overline{s}_{\overline{n}\|i} = \frac{(1+i)^{n}-1}{\rho} = \frac{i}{\rho} s_{\overline{n}\|i}$

Propiedad fundamental	$\lim_{m\to\infty} a^{(m)}_{\overline{n}\vert i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{\rho} = \bar{a}_{\overline{n}\vert i}$
Rentas perpetuas	$\bar{a}_{\overline{\infty}\vert i} = \frac{1}{\rho}$
Rentas diferidas	$(t_0-\alpha)/(\overline{V}_{t_0})_{\overline{t_0,t_n}\vert i} = (\overline{V}_{t_0})_{\overline{t_0,t_n}\vert i} \cdot (1+i)^{-(t_0-\alpha)}$
Rentas anticipadas	$(\alpha-t_n)/(\overline{V}_{t_n})_{\overline{t_0,t_n}\vert i} = (\overline{V}_{t_n})_{\overline{t_0,t_n}\vert i} \cdot (1+i)^{\alpha-t_n}$
$C(t)=c\cdot q^t$	$\overline{A}_{(c,q)\overline{n}\vert i} = c\frac{1-q^n(1+i)^{-n}}{\rho-\ln q}$
$C(t)=c+d\cdot t$	$\overline{A}_{(c,d)\overline{n}\vert i} = \left(c+\frac{d}{i}+d\cdot n\right)\bar{a}_{\overline{n}\vert i} - \frac{d\cdot n}{\rho}$

SECCIÓN CUARTA: OPERACIONES DE CONSTITUCIÓN


Operaciones de constitución
De aportaciones pospagables
De aportaciones prepagables
Introducción
Sistemas de constitución
- Descripción
- Dinámica
- Cuadro de constitución
- Términos constitutivos constantes
- Cuotas de constitución constantes
- Términos constitutivos variables en progresión geométrica
- Términos constitutivos variables en progresión aritmética
- Tantos efectivos

11 Operaciones de constitución de capitales. Planteamiento general

11.1. DESCRIPCIÓN DE LAS OPERACIONES DE CONSTITUCIÓN

Definición	Operaciones financieras compuestas de prestación múltiple y contraprestación única al final de la misma
Modalidades	Aportaciones prepagables
	Aportaciones pospagables

11.2. DINÁMICA DE LAS OPERACIONES DE CONSTITUCIÓN DE APORTACIONES PREPAGABLES

Equivalencia financiera en el origen	$C_n = \sum_{r=1}^{n} a_r \prod_{h=r}^{n} (1+i_h)$	
Saldo financiero	Método retrospectivo	$C_s^- = \sum_{r=1}^{s} a_r \prod_{h=r}^{s} (1+i_h)$
	Método prospectivo	$C_s^- = C_n \prod_{h=s+1}^{n} (1+i_h)^{-1} - \left(a_{s+1} + \sum_{r=s+2}^{n} a_r \prod_{h=s+1}^{r-1} (1+i_h)^{-1} \right)$
	Método recurrente	$C_s^- = (C_{s-1}^- + a_s)(1+i_s)$

<table>
<tr><td rowspan="4">Magnitudes financieras</td><td>Términos constitutivos</td><td>(a_s, t_s) donde $s = 1, 2, \ldots, n$</td><td rowspan="2">Relación:
$\Delta_s^- = a_s + I_s$</td></tr>
<tr><td>Cuotas de intereses</td><td>$I_s = i_s (C_{s-1}^- + a_s)$</td></tr>
<tr><td>Cuotas de constitución</td><td>$\Delta_s^- = C_s^- - C_{s-1}^-$</td><td rowspan="2">Relación:
$M_s^- = M_{s-1}^- - \Delta_s^-$</td></tr>
<tr><td>Capital pendiente de constituir</td><td>$M_s^- = C_n - C_s^-$</td></tr>
</table>

11.3. CUADRO DE CONSTITUCIÓN

<table>
<tr><td rowspan="5">Relaciones</td><td>$\Delta_s^- = a_s + I_s$</td></tr>
<tr><td>$a_s = \Delta_s^- - I_s$</td></tr>
<tr><td>$I_s = i_s (C_{s-1}^- + a_s)$</td></tr>
<tr><td>$C_s^- = (C_{s-1}^- + a_s)(1 + i_s) = C_{s-1}^- + \Delta_s^-$</td></tr>
<tr><td>$M_s^- = C_n - C_s^- = M_{s-1}^- - \Delta_s^-$</td></tr>
</table>

12 Operaciones prepagables de constitución de capitales. Casos particulares

12.1. INTRODUCCIÓN

Se definirán los diferentes sistemas de constitución que se utilizan en la práctica, mostrando cuáles son las relaciones concretas que surgen, para cada uno de ellos, entre algunas variables.

12.2. MÉTODO DE CUOTAS DE CONSTITUCIÓN CONSTANTES

C_n	$C_n = n \cdot \Delta^-$
a_s	$a_s = a_{s-1} - \dfrac{\Delta^- i}{1+i} = a_1 - (s-1)\dfrac{\Delta^- i}{1+i}$, siendo $a_1 = \dfrac{\Delta^-}{1+i}$
I_s	$I_s = I_{s-1} + \dfrac{\Delta^- i}{1+i} = I_1 + (s-1)\dfrac{\Delta^- i}{1+i}$
Δ_s^-	$\Delta^- = \dfrac{C_n}{n}$
C_s^-	$C_s^- = s \cdot \Delta^-$
M_s^-	$M_s^- = (n-s) \cdot \Delta^-$

12.3. MÉTODO DE TÉRMINOS CONSTITUTIVOS CONSTANTES

C_n	$C_n = a \cdot \ddot{s}_{\overline{n}\mid i}$
a_s	$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a = \dfrac{C_n}{\ddot{s}_{\overline{n}\mid i}}$
Δ_s^-	$\Delta_s^- = \Delta_{s-1}^-(1+i) = \Delta_1^-(1+i)^{s-1} = a(1+i)^s$
C_s^-	$C_s^- = a \cdot \ddot{s}_{\overline{s}\mid i} = C_n(1+i)^{-(n-s)} - a \cdot \ddot{a}_{\overline{n-s}\mid i}$
M_s^-	$M_s^- = (n-s) \cdot \Delta^-$

12.4. MÉTODO DE TÉRMINOS CONSTITUTIVOS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

C_n	$C_n = \ddot{S}_{(a,d)\overline{n}\mid i}$
a_s	$a_s = a + (s-1)d$
Δ_s^-	$\Delta_s^- = (\Delta_{s-1}^- + d)(1+i)$
C_s^-	$C_s^- = \ddot{S}_{(a,d)\overline{s}\mid i} = C_n(1+i)^{-(n-s)} - \ddot{A}_{(a+sd,d)\overline{n-s}\mid i}$

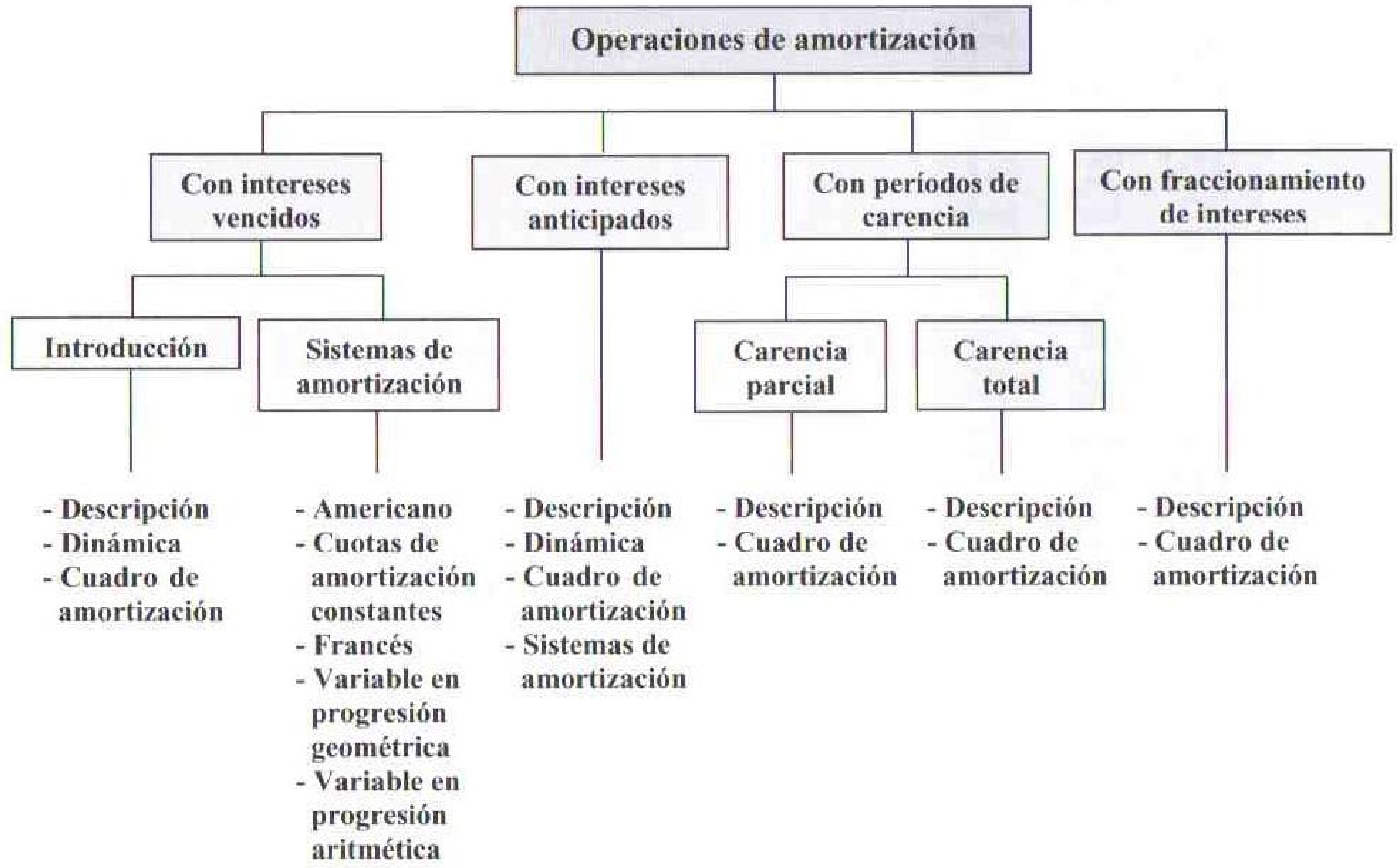
12.5. MÉTODO DE TÉRMINOS CONSTITUTIVOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

C_n	$C_n = \ddot{S}_{(a,q)\overline{n}\mid i}$
a_s	$a_s = a \cdot q^{s-1}$
Δ_s^-	$\Delta_s^- = (\Delta_{s-1}^- + a \cdot q^{s-2}(q-1))(1+i)$
C_s^-	$C_s^- = \ddot{S}_{(a,q)\overline{s}\mid i} = C_n(1+i)^{-(n-s)} - \ddot{A}_{(a \cdot q^s,q)\overline{n-s}\mid i}$

12.6. TANTOS EFECTIVOS EN UNA OPERACIÓN DE CONSTITUCIÓN

Características comerciales	Bilaterales	I_0, I_n, C_m
	Unilaterales	R
Tantos efectivos	Cliente: $$C_n + \left(I_0(1+i_c)^n + I_n - R\right) = \sum_{r=1}^{n}(a_r + Cm)(1+i_c)^{n-(r-1)}$$	
	Entidad financiera: $$C_n + \left(I_0(1+i_b)^n + I_n\right) = \sum_{r=1}^{n}(a_r + Cm)(1+i_b)^{n-(r-1)}$$	

SECCIÓN QUINTA: OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN


Operaciones de amortización
Con intereses vencidos
Con intereses anticipados
Con períodos de carencia
Con fraccionamiento de intereses
Introducción
Sistemas de amortización
Carencia parcial
Carencia total
- Descripción
- Dinámica
- Cuadro de amortización
- Americano
- Cuotas de amortización constantes
- Francés
- Variable en progresión geométrica
- Variable en progresión aritmética
- Descripción
- Dinámica
- Cuadro de amortización
- Sistemas de amortización
- Descripción
- Cuadro de amortización
- Descripción
- Cuadro de amortización
- Descripción
- Cuadro de amortización

13 Introducción a las operaciones de amortización

13.1. DESCRIPCIÓN DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN

Definición	Operaciones financieras compuestas de prestación única y contraprestación múltiple
Postulados	$a_s = I_s + A_s$ siendo: $I_s = C_{s-1} \cdot i_s$ y $A_s = C_{s-1} - C_s$
	$C_0 \cdot F(t_0, p) = \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot F(t_r, p)$

13.2. DINÁMICA DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN

Equivalencia financiera en el origen		$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=1}^{r} (1+i_h)^{-1}$
Saldo financiero	Método retrospectivo	$C_s = C_0 \prod_{h=1}^{s} (1+i_h) - \left[a_s + \sum_{r=1}^{s-1} a_r \prod_{h=r+1}^{s} (1+i_h) \right]$
	Método prospectivo	$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \prod_{h=s+1}^{r} (1+i_h)^{-1}$
	Método recurrente	$C_s = C_{s-1}(1+i_s) - a_s$

<table>
<tr><td rowspan="4">Magnitudes financieras</td><td>Términos amortizativos</td><td>(a_s, t_s) donde $s = 1,\ 2, \ldots, n$</td><td rowspan="2">Relación:
$A_s = a_s + I_s$</td></tr>
<tr><td>Cuotas de intereses</td><td>$I_s = C_{s-1} \cdot i_s$</td></tr>
<tr><td>Cuotas de amortización</td><td>$A = C_s - C_{s-1}$</td><td rowspan="2">Relación:
$M_s = M_{s-1} + A_s$</td></tr>
<tr><td>Capital pendiente de amortizar</td><td>$M_s = C_0 - C_s$</td></tr>
</table>

13.3. CUADRO DE AMORTIZACIÓN

<table>
<tr><td rowspan="5">Relaciones</td><td>$a_s = I_s + A_s$</td></tr>
<tr><td>$I_s = C_{s-1} \cdot i_s$</td></tr>
<tr><td>$A_s = a_s - I_s$</td></tr>
<tr><td>$C_s = C_{s-1}(1+i_s) - a_s = C_{s-1} - A_s$</td></tr>
<tr><td>$M_s = C_0 - C_s = M_{s-1} + A_s$</td></tr>
</table>

14 Sistemas de amortización

14.1. INTRODUCCIÓN

Se definirán los diferentes sistemas de amortización que se utilizan en la práctica, mostrando cuáles son las relaciones concretas que surgen, para cada uno de ellos, entre algunas variables.

14.2. SISTEMA AMERICANO DE AMORTIZACIÓN

a_s	$a_s = I_s = C_0 \cdot i_s$, para $s = 1, 2, ..., n-1$ $a_n = I_n + A_n = C_0 \cdot i_n + C_0$
I_s	$I_s = C_0 \cdot i_s$
A_s	$A_s = 0$, para $s = 1, 2, ..., n-1$ $A_n = C_0$
C_s	$C_s = C_0$, para $s = 1, 2, ..., n-1$ $C_n = 0$
M_s	$M_s = 0$, para $s = 1, 2, ..., n-1$ $M_n = C_0$

Método *sinking-fund*	
Operatoria	Sistema americano de amortización + Operación de constitución de aportaciones pospagables
Equivalencia financiera operación de constitución	$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a''_s \cdot \prod_{h=s+1}^{n} (1 + i_h)$
Desembolso total	$a_s = C_0 \cdot i_s + a''_s$
Saldo neto	$C_s = C_0 - C''_s$, siendo $C''_s = C''_{s-1}(1 + i_s) + a''_s$

14.3. MÉTODO DE CUOTAS DE AMORTIZACIÓN CONSTANTES

C_0	$C_0 = A_{(a_1; -A \cdot i)\, \overline{n}\rvert\, i}$
a_s	$a_s = a_{s-1} - A \cdot i = a_1 - (s-1)A \cdot i$, siendo $a_1 = C_0 \cdot i + A$
I_s	$I_s = I_{s-1} - A \cdot i = I_1 - (s-1)A \cdot i$, siendo $I_1 = C_0 \cdot i$
A_s	$A_1 = A_2 = \ldots = A_n = A = \dfrac{C_0}{n}$
C_s	$C_s = (n - s) \cdot A$
M_s	$M_s = s \cdot A$

14.4. MÉTODO FRANCÉS DE AMORTIZACIÓN

C_0	$C_0 = a \cdot a_{\overline{n}\rvert\, i}$
a_s	$a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a = \dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\rvert\, i}}$

A_s	$A_s = A_{s-1}(1+i) = A_1(1+i)^{s-1}$, siendo $A_1 = \dfrac{C_0}{s_{\overline{n}\vert i}} = a - C_0 \cdot i$
C_s	$C_s = C_0(1+i)^s - a \cdot s_{\overline{s}\vert i} = a \cdot a_{\overline{n-s}\vert i}$
M_s	$M_s = A_1 \cdot s_{\overline{s}\vert i}$

14.5. SISTEMA DE TÉRMINOS AMORTIZATIVOS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

C_0	$C_0 = A_{(a,d)\overline{n}\vert i}$
a_s	$a_s = a + (s-1) \cdot d$
A_s	$A_s = A_{s-1}(1+i) + d = A_1(1+i)^{s-1} + d \cdot s_{\overline{s-1}\vert i}$
C_s	$C_s = C_0(1+i)^s - S_{(a,d)\overline{s}\vert i} = A_{(a+sd,d)\overline{n-s}\vert i}$

14.6. SISTEMA DE TÉRMINOS AMORTIZATIVOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

C_0	$C_0 = A_{(a,q)\overline{n}\vert i}$
a_s	$a_s = a \cdot q^{s-1}$
A_s	$A_s = A_{s-1}(1+i) + a_{s-1}(q-1)$
C_s	$C_s = C_0(1+i)^s - S_{(a,q)\overline{s}\vert i} = A_{(a \cdot q^s, q)\overline{n-s}\vert i}$

15 Amortización con intereses anticipados

15.1. DESCRIPCIÓN DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN CON INTERESES ANTICIPADOS

Funcionamiento	Los intereses se pagan al comienzo del período al que corresponden
Relaciones	$(1+i)^{-1} = 1 - i^* \Rightarrow i = \frac{i^*}{1-i^*}$, e $i^* = \frac{i}{1+i}$
	$C_0 = C_0^* - a_0 = C_0^* - C_0^* \cdot i_1^* = C_0^*(1-i_1^*)$ siendo: – C^*_0 el capital nominal prestado – C_0 el capital neto o líquido recibido
Equivalencia financiera en el origen	$C_0 = \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=1}^{r} (1+i_h)^{-1} = \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=1}^{r} (1-i_h^*)$
	$C_0^* = C_0^* \cdot i_1^* + \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=1}^{r} (1+i_h)^{-1} = C_0^* \cdot i_1^* + \sum_{r=1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=1}^{r} (1-i_h^*)$

15.2. DINÁMICA DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN CON INTERESES ANTICIPADOS

Saldo financiero neto	Método prospectivo	$C_s = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=s+1}^{r}(1+i_h)^{-1} = \sum_{r=s+1}^{n} a_r \cdot \prod_{h=s+1}^{r}(1-i_h^*)$
	Método recurrente	$C_s = C_{s-1}(1+i_s) - a_s = C_{s-1}(1-i_s^*)^{-1} - a_s$
Saldo financiero nominal	Método prospectivo	$C_s^* = a_{s+1} + \sum_{r=s+2}^{n} a_r \cdot \prod_{h=s+2}^{r}(1+i_h)^{-1} =$ $= a_{s+1} + \sum_{r=s+2}^{n} a_r \cdot \prod_{h=s+2}^{r}(1-i_h^*)$
	Método recurrente	$C_{s-1}^* = C_s^*(1-i_{s+1}^*) + a_s$
Relación entre saldos netos y nominales		$C_s^* = C_s(1+i_{s+1}) = C_s(1-i_{s+1}^*)^{-1}$
		$C_s = C_s^*(1-i_{s+1}^*) = C_s^* - C_s^* \cdot i_{s+1}^*$
Magnitudes financieras	a_s	$a_s = (C_{s-1}^* - C_s^*) + C_s^* \cdot i_{s+1}^* = A_s^* + I_{s+1}^*$
	C_s^*	$C_0^* = \sum_{r=1}^{n} A_r^*$ $C_s^* = \sum_{r=s+1}^{n} A_r^*$ $C_n^* = 0$
	M_s^*	$M_s^* = C_0^* - C_s^* = \sum_{r=1}^{s} A_r^* = M_{s-1}^* + A_s^*$

15.3. CUADRO DE AMORTIZACIÓN

Relaciones	$C_s^* = C_{s+1}^*(1 - i_{s+2}^*) + a_{s+1}$
	$C_s^* = C_{s+1}^* + A_{s+1}^*$
	$C_s^* = C_{s-1}^* - A_s^*$
	$I_{s+1}^* = C_s^* \cdot i_{s+1}^*$
	$a_s = A_s^* + I_{s+1}^*$

15.4. SISTEMAS DE AMORTIZACIÓN

15.4.1. Sistema alemán de amortización

Equivalencia financiera	$C_0^* = a \cdot \ddot{a}_{\overline{n}\rvert i}$	$C_0 = a \cdot a_{\overline{n}\rvert i}$
a_s	$a = \dfrac{C_0^*}{\ddot{a}_{\overline{n}\rvert i}}$	$a = \dfrac{C_0}{a_{\overline{n}\rvert i}}$
A_s^*	$A^*_s = A^*_{s+1}(1-i^*) = \cdots = A^*_n(1-i^*)^{n-s} = a(1-i^*)^{n-s}$ $A^*_{s+1} = A^*_s(1-i^*)^{-1} = A^*_s(1+i) = \cdots = A^*_1(1+i)^s$	
A_s	$A_{s+1} = A_s(1+i) = \cdots = A_1(1+i)^s = A_1(1-i^*)^{-s}$ siendo: $A_1 = a - I_1 = a - C_0 \cdot i$	
Relación	$A_s = A_s^*(1 - i^*)$	
C_s^*	$C_s^* = a \cdot \ddot{a}_{\overline{n-s}\rvert i}$	
C_s	$C_s = C_s^*(1+i)^{-1} = a \cdot a_{\overline{n-s}\rvert i}$	

15.4.2. Método de cuotas de amortización constantes con intereses anticipados

a_s	siendo: $a_s = a_1 - (s-1)\cdot A^*\cdot i^*$ $a_1 = I^*_2 + A^* = C^*_1\cdot i^* + A^*$
A^*_s	$A^*_1 = A^*_2 = \cdots = A^*_n = A^* = \dfrac{C^*_0}{n}$
C^*_s	$C^*_s = (n-s)\cdot A^*$
M^*_s	$M^*_s = s\cdot A^*$

16 Operaciones de amortización con períodos de carencia y con fraccionamiento de intereses

16.1. OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN CON PERÍODOS DE CARENCIA

16.1.1. Carencia parcial

Equivalencia financiera	$C_0 = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s} (1+i_h)^{-1}$	$C_r = C_0 = \sum_{s=r+1}^{n} a_s \prod_{h=r+1}^{s} (1+i_h)^{-1}$
a_s	$a_s = \begin{cases} I_s = C_0 \cdot i_s, & \text{para } s = 1,2,\ldots,r \\ I_s + A_s, & \text{para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$	
I_s	$I_s = \begin{cases} C_0 \cdot i_s, & \text{para } s = 1,2,\ldots,r \\ C_{s-1} \cdot i_s, & \text{para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$	
A_s	$A_s = \begin{cases} 0, & \text{para } s = 1,2,\ldots,r \\ a_s - I_s, & \text{para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$	
C_s	$C_s = \begin{cases} C_0, & \text{para } s = 1,2,\ldots,r \\ C_{s-1} - A_s, & \text{para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$	
M_s	$M_s = \begin{cases} 0, & \text{para } s = 1,2,\ldots,r \\ M_{s-1} + A_s, & \text{para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$	

16.1.2. Carencia total

Equivalencia financiera	$C_0 = \sum_{s=r+1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{sr} (1+i_h)^{-1}$ $C_r = C_0 \prod_{h=1}^{s} (1+i_h) = \sum_{s=r+1}^{n} a_s \prod_{h=r+1}^{s} (1+i_h)^{-1}$
a_s	$a_s = \begin{cases} 0 \text{ para } s = 1,2,\ldots,r \\ I_s + A_s, \text{ para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$
I_s	$I_s = \begin{cases} 0, \text{ para } s = 1,2,\ldots,r \\ C_{s-1} \cdot i_s, \text{ para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$
A_s	$A_s = \begin{cases} 0, \text{ para } s = 1,2,\ldots,r \\ a_s - I_s, \text{ para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$
C_s	$C_s = \begin{cases} C_{s-1}(1+i_s), \text{ para } s = 1,2,\ldots,r \\ C_{s-1} - A_s, \text{ para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$
M_s	$M_s = \begin{cases} 0, \text{ para } s = 1,2,\ldots,r \\ M_{s-1} + A_s, \text{ para } s = r+1,\ldots,n \end{cases}$

16.2. OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN CON FRACCIONAMIENTO DE INTERESES

FRACCIONAMIENTO UNIFORME DE FRECUENCIA m	
Equivalencia financiera	$C_0 = \sum_{s=1}^{n} \left(\sum_{h=1}^{m} a_{s,h} (1+i_{s(m)})^{-h} \right) \cdot \prod_{h=1}^{s} (1+i_h)^{-1}$
$a_{s,h}$	$a_{s,h} = \begin{cases} C_{s-1} \cdot i_{s(m)} \text{ para } h = 1,2,\ldots,m-1 \\ C_{s-1} \cdot i_{s(m)} + A_s, \text{ para } h = m \end{cases}$
$I_{s,h}$	$I_{s,h} = C_{s-1} \cdot i_{s(m)}$

$A_{s,h}$	$A_{s,h}=\begin{cases}0 \quad \text{para } h=1,2,\ldots,m-1\\ a_{s,m}-I_{s,m}=A_s, \quad \text{para } h=m\end{cases}$
$C_{s,h}$	$C_{s,h}=\begin{cases}C_{s-1,m}=C_{s-1} \quad \text{para } h=1,2,\ldots,m-1\\ C_{s-1,m}-A_s=C_s, \quad \text{para } h=m\end{cases}$
$M_{s,h}$	$M_{s,h}=\begin{cases}M_{s-1,m}=M_{s-1} \quad \text{para } h=1,2,\ldots,m-1\\ M_{s-1,m}+A_s=M_s, \quad \text{para } h=m\end{cases}$

16.3. TANTOS EFECTIVOS EN LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN

		Iniciales	Finales	Periódicas
Características comerciales	Bilaterales	$Ca - Ge$	Cc	Cb
	Unilaterales prestamista	–	–	I
	Unilaterales prestatario	$Gn^i - Gr^i$ $Gi^i - Gg^i$ Gt	$Gn^f - Gr^f$ $Gi^f - Gg^f$	$Ai - Gs$
Tantos efectivos	Cliente: $C_0-(Ca+Ge+Gn^i+Gr^i+Gi^i+Gt+Gg^i)=$ $=\sum_{r=1}^{n}(a_r+Cb+Gs)(1+i_p)^{-r}+$ $(Cc+Gn^f+Gr^f+Gi^f+Gg^f)(1+i_p)^{-n}-$ $-\sum_{r=1}^{n}Ai_r(1+i_p)^{-\left(r+\frac{1}{2}\right)}$			
	Entidad financiera: $C_0-(Ca+Ge)=$ $=\sum_{r=1}^{n}(a_r+Cb)(1+i_a)^{-r}+Cc(1+i_a)^{-n}-\sum_{r=1}^{n}I_r(1+i_a)^{-\left(r+\frac{1}{2}\right)}$			