1.1. CAPITAL FINANCIERO

La apreciación que se tenga de los bienes económicos está vinculada no sólo a su valor, expresado en unidades monetarias, sino también al momento de su disponibilidad. Por ello, es posible asociar a cualquier bien económico una magnitud bidimensional, de primer componente el valor del bien en unidades monetarias, y de segundo el vencimiento o momento del tiempo en que dicho bien es disponible.

Podemos señalar que[1] **«se denomina capital financiero a la medida de un bien económico referida al momento de su disponibilidad o vencimiento».** Por tanto, a cualquier bien económico le hacemos corresponder la magnitud bidimensional capital financiero (C, t), en la que $C > 0$ indica la cuantía y t el vencimiento. Para su correcta identificación se requiere señalar la unidad monetaria en la que se expresa la cuantía, la unidad de tiempo y el origen de éste. En consecuencia, cuando hablamos de un capital financiero nos estamos refiriendo a una **cuantía de dinero** y a su **vencimiento.** Por ejemplo, 2.000 € con vencimiento dentro de 2 años es el capital financiero (2.000,2).

Gráficamente, podemos representar los capitales financieros como aparece en la figura 1.1, o bien de forma simplificada, que es lo más usual (véanse figuras 1.2 y 1.3).

1.2. COMPARACIÓN Y EQUIVALENCIA DE CAPITALES FINANCIEROS

Si a cada bien económico le hacemos corresponder un capital financiero, los diversos intercambios de bienes económicos realizados por distintos sujetos se traducen en intercambios de los correspondientes capitales financieros a ellos

[1] Gil Peláez (1987: 24).

© Ediciones Pirámide

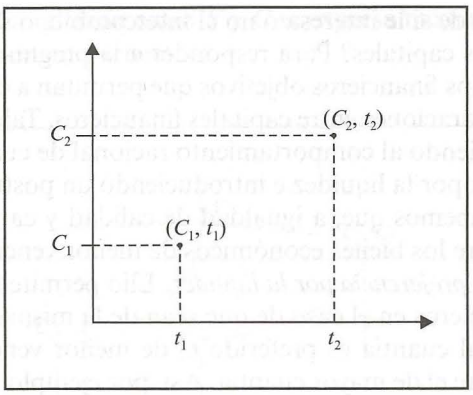


Figura 1.1.

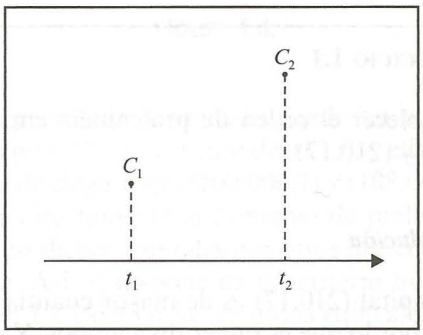


Figura 1.2.

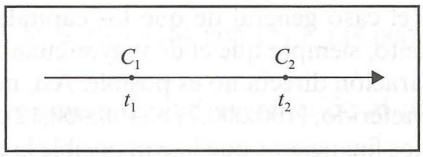


Figura 1.3.

vinculados. Por ello, es preciso proceder a la valoración y comparación de capitales financieros. Así, por ejemplo, si se adquiere un bien de precio 12 € que debe abonarse dentro de 8 meses, y se le propone al vendedor abonarle una cuantía de 10 € dentro de 3 meses, se le está proponiendo un intercambio entre el capital financiero (12,8) y el capital (10,3). El vendedor se plantea inmediatamente la pre-

© Ediciones Pirámide

gunta de si le interesa o no el intercambio, o sea, ¿son indiferentes o equivalentes ambos capitales? Para responder a la pregunta planteada es preciso disponer de criterios financieros objetivos que permitan a cualquier sujeto económico efectuar comparaciones entre capitales financieros. Tales criterios financieros se establecen atendiendo al comportamiento racional de cualquier sujeto en cuanto a su preferencia por la liquidez e introduciendo un postulado de fácil y general aceptación.

Sabemos que, a igualdad de calidad y cantidad, cualquier sujeto económico prefiere los bienes económicos de menor vencimiento, lo que constituye el *principio de preferencia por la liquidez*. Ello permite la comparación directa de capitales financieros en el caso de que sean de la misma cuantía o del mismo vencimiento: a igual cuantía es preferido el de menor vencimiento, y a igual vencimiento se prefiere el de mayor cuantía. Así, por ejemplo, entre los capitales (100,2) y (100,5) cualquier sujeto prefiere el primer capital: (100,2) $\succ$ (100,5). De igual forma, entre los capitales (120,8) y (150,8) es preferido el segundo: (150,8) $\succ$ (120,8).

EJERCICIO 1.1

Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (200,18); (190,18) y (210,17).

Resolución

El capital (210,17) es de mayor cuantía que los otros dos y de menor vencimiento, por lo que es preferido a ambos. Y entre los de vencimiento 18, se prefiere el de mayor cuantía. Por tanto, queda: (210,17) $\succ$ (200,18) $\succ$ (190,18).

Para el caso general de que los capitales sean de distinta cuantía y distinto vencimiento, siempre que el de mayor cuantía también tenga mayor vencimiento, la comparación directa no es posible. Así, no sabemos cuál de los siguientes capitales es preferido: (100.000,7) o (108.000,12). En consecuencia, es preciso disponer de criterios financieros que hagan posible la comparación de capitales de cualquier cuantía y vencimiento. Una forma de disponer de tales criterios es aceptando como postulado[2] que cualquier sujeto económico es capaz de definir un criterio mediante el cual, dado un capital financiero (C, t), le es posible obtener la cuantía V de un capital sustituto o equivalente del mismo, con vencimiento en un punto fijo p. Dicho postulado se denomina *«Principio de sustitución o de proyección financiera en p»*, siendo V la cuantía equivalente o sustituta en p de la cuantía C, por lo que al sujeto económico le resulta indiferente que se trate del capital (C, t)

[2] Gil Peláez (1987: 29).

© Ediciones Pirámide

o del capital (V, p). La relación entre V y C se expresa mediante la igualdad: $V = Proy_p(C, t)$. Gráficamente, tenemos:

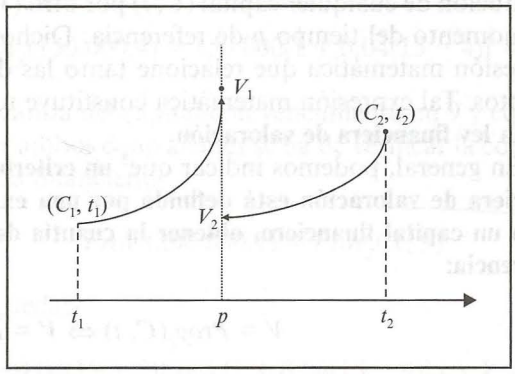


Figura 1.4.

De acuerdo con el postulado formulado, fijado un punto de referencia p es posible encontrar un capital (V, p) sustituto del (C, t), y ello tanto para $t > p$ como para $t < p$. Así, si se ha de elegir entre (100.000,7) y (108.000,12), el sujeto económico no puede aplicar directamente el principio de preferencia por la liquidez, siendo necesario sustituir dichos capitales por otros que considere equivalentes en un mismo vencimiento. Así, si dispone de un criterio que le permite, fijado un punto p por ejemplo en 15, calcular las cuantías equivalentes, ya podrá efectuar la comparación. Supongamos que de acuerdo con dicho criterio obtiene:

$$V_1 = Proy_p(100.000,7) = 130.000$$

$$V_2 = Proy_p(108.000,12) = 145.000$$

Al ser $V_2 > V_1$, el segundo capital es preferido al primero: $(108.000,12) > (100.000,7)$.

Cuando decimos que el capital (V, p) es el sustituto del capital (C, t), hemos de interpretar que al sujeto económico que ha de cobrar (o pagar) el capital de cuantía C, le resulta indiferente cobrar (o pagar) la cuantía V en p en lugar de la cuantía C en t.

En general, si dos capitales tienen, de acuerdo con un criterio financiero de sustitución, el mismo sustituto en p, se dice que son **capitales equivalentes** $(C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)$, lo que se indica a través de la siguiente **ecuación de equivalencia financiera:**

$$Proy_p(C_1, t_1) = Proy_p(C_2, t_2)$$

© Ediciones Pirámide

1.3. LEYES FINANCIERAS: CONCEPTO Y PROPIEDADES

Tal y como hemos señalado, todo sujeto económico dispone de un criterio de sustitución de cualquier capital (C, t) por otro (V, p) que considera equivalente en un momento del tiempo p de referencia. Dicho criterio ha de plasmarse en una expresión matemática que relacione tanto las dos cuantías como los dos vencimientos. Tal expresión matemática constituye un **criterio financiero de valoración** o una **ley financiera de valoración.**

En general, podemos indicar que[3] **un criterio financiero de valoración o ley financiera de valoración está definida por una expresión matemática que permite, dado un capital financiero, obtener la cuantía de su equivalente en un punto p de referencia:**

$$V = Proy_p(C, t) \Leftrightarrow V = F(C, t; p)$$

EJERCICIO 1.2

Considerando que la siguiente expresión constituye una ley financiera de valoración, $F(C, t; p) = C[1 + 0{,}10(p - t)]$; $p = 20$, determinar cuál de los capitales es preferido: (100.000,8) o (120.000,13).

Resolución

Para poder comparar ambos capitales, hemos de calcular el equivalente en p de cada uno de ellos, siendo preferido el capital cuyo sustituto tenga mayor cuantía. El sustituto en $p = 20$ de cada uno de los capitales dados se obtiene sustituyendo en la expresión de la ley financiera los valores correspondientes a C, p y t:

$$V_1 = Proy_p(100.000,8) = 100.000[1 + 0{,}10(20 - 8)] = 220.000$$

$$V_2 = Proy_p(120.000,13) = 120.000[1 + 0{,}10(20 - 13)] = 204.000$$

Como $V_1 > V_2$, por tanto es $(100.000,8) \succ (120.000,13)$.

EJERCICIO 1.3

Supóngase que la siguiente expresión constituye una ley financiera de valoración para $p = 15$: $F(C, t; p) = C[1 + 0{,}04(p - t)]$. Calcular: *a*) cuantía del capital sustituto de (150.000,4), y *b*) capital equivalente en 9 del capital (200.000,7).

---

[3] Puede verse Gil Peláez (1987: 31).

© Ediciones Pirámide

Resolución

a) El sustituto en $p = 15$ del capital (150.000,4) se obtiene sustituyendo en la expresión de la ley financiera, C, p y t por los valores correspondientes:

$$V = Proy_p(150.000,4) = 150.000[1 + 0,04(15 - 4)] = 216.000$$

b) Sea X la cuantía del capital con vencimiento en 9 y equivalente al capital (200.000,7). Por ser ambos equivalentes se ha de verificar la correspondiente ecuación de equivalencia financiera:

$$Proy_p(200.000,7) = Proy_p(X, 9)$$

Y al sustituir queda:

$$200.000[1 + 0,04(15 - 7)] = X[1 + 0,04(15 - 9)] \Leftrightarrow X = 212.903,23$$

En general, cuando $t < p$, se dice que V es la cuantía en p resultado de la capitalización del capital (C, t). La ley se representa en este caso por $L(C, t; p)$, recibiendo el nombre de **ley financiera de capitalización en *p***, siendo V el **valor capitalizado o montante.**

En el caso de $t > p$, el valor V es la cuantía en p resultado de la actualización o descuento del capital (C, t). La ley se representa por $A(C, t; p)$, denominándose **ley financiera de descuento en *p***, siendo V el **valor actual o valor descontado.**

Tenemos:

$$F(C, t; p) = \begin{cases} L(C, t; p) \text{ para } t < p \\ A(C, t; p) \text{ para } t > p \end{cases}$$

Es preciso señalar que una expresión matemática, para poder ser tomada como ley financiera o criterio financiero de valoración, ha de cumplir un conjunto de propiedades lógicas. Dichas **propiedades** son las siguientes:

Primera. Los valores que tome han de ser positivos: $F(C, t; p) > 0$. Ello es así porque la ecuación $V = F(C, t; p)$ representa la cuantía del capital (V, p) sustituto del capital (C, t), y dicha cuantía ha de ser positiva.

Segunda. Fijado un punto de valoración p, la cuantía de un capital y la de su sustituto han de ser proporcionales. Por tanto, al multiplicar (o dividir) la cuantía C de un capital por un cierto número, la cuantía V del capital sustituto debe quedar multiplicada (o dividida) por dicho número. En consecuencia, si $(C, t) \sim (V, p)$, se ha de verificar $(C \times k, t) \sim (V \times k, p)$. Así, por ejemplo, si $V = Proy_p(1.000, t)$, un

© Ediciones Pirámide

capital triple debe tener un sustituto de cuantía también triple: $Proy_p(3.000, t) = 3 \times V = 3 \times Proy_p(1.000, t)$, o expresado de otra forma: si $(1.000, t) \sim (V, p)$, también se verifica $(3.000, t) \sim (3 \times V, p)$.

En general, como la cuantía del capital (C, t) se obtiene al multiplicar por C la cuantía del capital unitario: $(C, t) = C(1, t)$, la cuantía V del capital sustituto de (C, t) también debe obtenerse al multiplicar por C la cuantía del sustituto del capital unitario: $V = Proy_p(C, t) = F(C, t; p) = C \times F(1, t; p)$, siendo $F(1, t; p) = F(t; p)$ la ley financiera unitaria o cuantía del sustituto del capital unitario. Por tanto, siendo $L(1, t; p) = L(t; p)$ la ley financiera unitaria de capitalización, y $A(1, t; p) = A(t; p)$ la ley financiera unitaria de descuento, tenemos:

$$V = Proy_p(C, t) = C \times F(t; p) = \begin{cases} C \times L(t; p) \text{ para } t < p \\ C \times A(t; p) \text{ para } t > p \end{cases}$$

De acuerdo con lo señalado, para $t < p$, como $V > C$, se ha de verificar: $V = C \times L(t; p) > C \Rightarrow L(t; p) > 1$. Asimismo, para la ley unitaria de descuento, al ser $t > p$ y $V < C$, se cumple $V = C \times A(t; p) < C \Rightarrow A(t; p) < 1$. Además, como V ha de tomar valores positivos, se verifica: $0 < A(t; p) < 1$. Los siguientes gráficos ilustran lo expuesto:

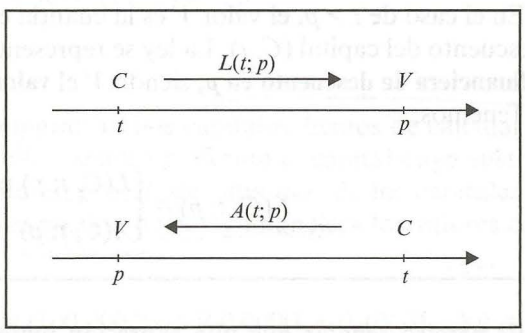


Figura 1.5.

Tercera. Cuando no ha transcurrido tiempo, o sea, cuando sea $t = p$, la función ha de tomar el valor uno: $F(t; t) = F(p; p) = 1$.

Cuarta. La ley ha de ser creciente con p y decreciente con t:

$$\frac{\Delta_p F(t; p)}{\Delta p} > 0; \quad \frac{\Delta_t F(t; p)}{\Delta t} < 0$$

Esta propiedad es consecuencia del principio de preferencia por la liquidez, lo que implica que, al alejarse la disponibilidad de un bien, ha de compensarse con

© Ediciones Pirámide

un aumento de cuantía, así como que el acercamiento supone una disminución de cuantía. Así, por ejemplo, si el equivalente en $p = 10$ del capital (100,2) vale 140, si hallamos el equivalente en $p = 12$, éste ha de ser superior a 140, dado que está más alejado en el tiempo. Puede verse en la figura 1.6.

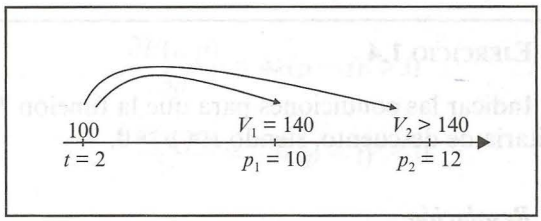


Figura 1.6.

Y con una ley de descuento, si por ejemplo el equivalente en $p = 10$ del capital (100,15) vale 90, si el capital venciese en 20, el equivalente debe ser inferior a 90, por ejemplo 80. Gráficamente queda reflejado en la figura 1.7.

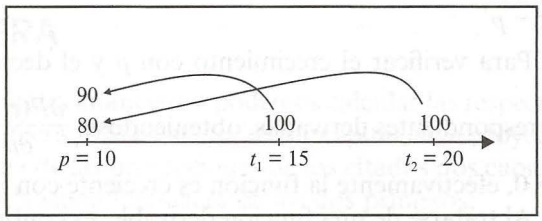


Figura 1.7.

Si la correspondiente expresión matemática de la ley financiera es una función derivable, el crecimiento con p y el decrecimiento con t se expresa:

$$\frac{\partial F(t;p)}{\partial p} > 0; \quad \frac{\partial F(t;p)}{\partial t} < 0$$

Quinta. La función ha de ser continua con respecto a t y continua con respecto a p separadamente:

$$\Delta_p F(t;p) \xrightarrow[\Delta p \to 0]{} 0$$

$$\Delta_t F(t;p) \xrightarrow[\Delta t \to 0]{} 0$$

© Ediciones Pirámide

Esta propiedad pone de manifiesto que para incrementos infinitesimales de la variable tiempo, los correspondientes incrementos de la variable cuantía también han de ser infinitesimales. Por otra parte, con tal que $F(t; p)$ sea derivable, se verifica esta propiedad[4].

EJERCICIO 1.4

Indicar las condiciones para que la función $F(t; p) = a - b(t - p)$ sea una ley unitaria de descuento, siendo $t > p > 0$.

Resolución

Se ha de verificar $F(t; t) = F(p; p) = a - b(p - p) = 1$, por lo que $a = 1$, con lo que la función a estudiar es $F(t; p) = 1 - b(t - p)$.

Como ha de ser $0 < A(t; p) < 1$, tenemos: $F(t; p) = 1 - b(t - p) > 0 \Rightarrow b < \dfrac{1}{t - p}$ y $F(t; p) = 1 - b(t - p) < 1 \Rightarrow b > 0$. En consecuencia, el valor de b verifica $0 < b < \dfrac{1}{t - p}$.

Para verificar el crecimiento con p y el decrecimiento con t, calculamos las correspondientes derivadas, obteniéndose: $\dfrac{\partial F(t; p)}{\partial p} = b$; $\dfrac{\partial F(t; p)}{\partial t} = -b$. Como es $b > 0$, efectivamente la función es creciente con p y decreciente con t.

Al tratarse de una función derivable, es continua, por lo que la última propiedad no es preciso verificarla. En conclusión, la función dada es una ley financiera unitaria de descuento, verificándose:

$$A(t; p) = 1 - b(t - p) \text{ con } \begin{cases} 0 < p < t \\ 0 < b < \dfrac{1}{t - p} \end{cases}$$

EJERCICIO 1.5

Señalar las condiciones que debe verificar la expresión $F(t; p) = a + k(p - t)^4$ para ser una ley unitaria de capitalización, con $p > t > 0$.

---

[4] Recordemos que, en una función continua, ante incrementos infinitesimales de la variable independiente, los correspondientes incrementos de la variable dependiente también son infinitesimales. Además, toda función derivable es continua.

© Ediciones Pirámide

Resolución

De $F(t; t) = 1 = a + k(t - t)^4 \Rightarrow a = 1$. Como ha de ser $L(t; p) > 1 \Rightarrow 1 + k(p - t)^4 > 1 \Rightarrow k > 0$, pues $(p - t)^4 > 0$. En cuanto al crecimiento y decrecimiento, ambos se verifican, pues al ser $k > 0$ y $p > t$ por tratarse de una ley de capitalización, las derivadas valen:

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial p} = 4k(p - t)^3 > 0$$

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial t} = -4k(p - t)^3 < 0$$

Y como es una función derivable, también es continua. Por tanto, la expresión dada es una ley financiera de capitalización, cumpliéndose:

$$L(t; p) = 1 + k(p - t)^4 \begin{cases} 0 < t < p \\ k > 0 \end{cases}$$

1.4. SUMA FINANCIERA

Dados dos capitales financieros, podemos calcular las respectivas proyecciones en un punto cualquiera p. Si existe un tercer capital cuya proyección en el mismo punto p sea la suma de las proyecciones de los citados dos capitales, decimos que el tercer capital es la suma financiera de los dos primeros:

$$Proy_p(C_1, t_1) + Proy_p(C_2, t_2) = Proy_p(S, q) \Leftrightarrow (C_1, t_1) + (C_2, t_2) = (S, q)$$

En general, dados n capitales financieros (C_1, t_1), (C_2, t_2), ..., (C_n, t_n), se dice que el capital (S, q) es su suma financiera, si se verifica que el equivalente en p del capital suma es la suma de los equivalentes en p de los capitales sumandos:

$$(C_1, t_1) + (C_2, t_2) + ... + (C_n, t_n) = (S, q) \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow Proy_p(C_1, t_1) + Proy_p(C_2, t_2) + ... + Proy_p(C_n, t_n) = Proy_p(S, q) = \sum_{s=1}^{n} Proy_p(C_s, t_s)$$

EJERCICIO 1.6

Dados los capitales financieros (100.000,4) y (150.000,6), calcular su suma financiera en 9 sabiendo que la ley financiera a utilizar es $L(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$, siendo 12 su punto de aplicación.

© Ediciones Pirámide

Resolución

De acuerdo con lo señalado, se ha de verificar:

$$(S, 9) = (100.000,4) + (150.000,6) \Rightarrow S[1 + 0,05(12 - 9)] =$$

$$= 100.000[1 + 0,05(12 - 4)] + 150.000[1 + 0,05(12 - 6)] \Rightarrow S = 291.304,35$$

EJERCICIO 1.7

Hallar la suma financiera en cuatro de los capitales (10.000,2), (15.000,5) y (20.000,7), tomando como ley financiera unitaria:

$$F(t; p) = \begin{cases} 1 + 0,10(p - t), & t < p = 5 \\ 1 - 0,12(t - p), & t > p = 5 \end{cases}$$

Resolución

Teniendo en cuenta el concepto de suma financiera, se verifica:

$$(S, 4) = (10.000,2) + (15.000,5) + (20.000,7) \Rightarrow S[1 + 0,10(5 - 4)] =$$

$$= 10.000[1 + 0,10(5 - 2)] + 15.000 + 20.000[1 - 0,12(7 - 5)] \Rightarrow S = 39.272,73$$

Debemos observar que para calcular el equivalente del capital (10.000,2) utilizamos la expresión $1 + 0,10(p - t)$, válida para $t < p = 5$, y para el sustituto del capital (20.000,7) la expresión a usar es $1 - 0,12(t - p)$, válida para $t > p = 5$. En cuanto al capital (15.000,5), su proyección en $p = 5$, al no transcurrir tiempo, vale 15.000.

1.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (120,30), (110,31) y (130,29).

Resolución

El capital (130,29) es de mayor cuantía que los otros dos y de menor vencimiento, por lo que es preferido a ambos. Y entre los otros dos, es preferido el de mayor cuantía y menor vencimiento. Por tanto, queda: (130,29) > (120,30) > (110,31).

© Ediciones Pirámide

2. Una persona tiene derecho a cobrar los siguientes capitales financieros: (4.000,6) y (8.000,10). Le proponen pagarle, en sustitución de ambos capitales, el capital único (12.000,12). Justificar razonadamente si le interesa el intercambio.

Resolución

Si consideramos $p = 12$, se ha de verificar: $Proy_p(C, t) = V > C$, por lo que tenemos:

$$Proy_{p=12}(4.000,6) > 4.000$$

$$Proy_{p=12}(8.000,10) > 8.000$$

En consecuencia, $Proy_{p=12}(4.000,6) + Proy_{p=12}(8.000,10) > 12.000$, por lo que no le interesa la sustitución.

3. Calcular el capital equivalente en 20 del capital (800.000,14), siendo la ley financiera unitaria $L(t; p) = 1 + 0{,}12(p^2 - t^2)$, $p = 25$.

Resolución

Se ha de verificar la ecuación de equivalencia financiera entre los capitales (800.000,14) y $(X, 20)$:

$$800.000[1 + 0{,}12(25^2 - 14^2)] = X[1 + 0{,}12(25^2 - 20^2)] \Rightarrow X = 1.499.428{,}57$$

4. Señalar las condiciones que debe verificar la expresión $f(t; p) = e^{kp^2 - ht^2}$ para ser una ley unitaria de capitalización.

Resolución

$f(t; t) = e^{t^2(k-h)} = 1 \Rightarrow t^2(k - h) = 0 \Rightarrow k = h \Rightarrow f(t; p) = e^{k(p^2 - t^2)}$. Al tratarse de una ley de capitalización, ha de tomar un valor mayor que uno, que lo tomará siempre que el exponente de la expresión anterior sea positivo: $f(t; p) = e^{k(p^2 - t^2)} > >1 \Rightarrow k(p^2 - t^2) > 0 \Rightarrow k > 0$, pues $p^2 - t^2 > 0$ al ser $p > t$. En cuanto al crecimiento con p y decrecimiento con t, se verifica con $k > 0$:

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial p} = 2kp \times e^{k(p^2 - t^2)} > 0$$

$$\frac{\partial F(t; p)}{\partial t} = -2kt \times e^{k(p^2 - t^2)} < 0$$

© Ediciones Pirámide

Como se trata de una función exponencial, es continua para t y p. Queda, pues:

$$L(t;p) = e^{k(p^2-t^2)} \begin{cases} k > 0 \\ 0 < t < p \end{cases}$$

5. Indicar si es posible utilizar la ley de descuento $A(t;p) = 1 - 0{,}10(t-p)$ con $p = 3$ para hallar el equivalente del capital (100,15).

Resolución

El equivalente en $p = 3$ del capital dado vale: $V = 100[1 - 0{,}10(15 - 3)] = -20$, lo cual es absurdo, por ser una cantidad negativa. Para que la cuantía sea una cantidad positiva, $A(t;p)$ ha de ser positivo: $1 - 0{,}10(t-p) > 0 \Rightarrow t < 10 + p$: intervalo de validez de la ley de descuento. Si $t = 15$ y $p = 3$ no se verifica la restricción anterior, por lo que la ley no es aplicable para tales valores de t y p.

6. Determinar el valor de x para que la suma financiera de los capitales (150.000,10) y (250.000, x) sea el capital (440.000, $x - 1$), sabiendo que la ley financiera unitaria es: $A(t;p) = 1 - 0{,}10(t-p)$, $p = 8$.

Resolución

De acuerdo con los datos se verifica:

$$(440.000, x-1) = (150.000,10) + (250.000, x) \Rightarrow 150.000[1 - 0{,}10(10-8)] +$$
$$+ 250.000[1 - 0{,}10(x-8)] = 440.000[1 - 0{,}10(x-1-8)] \Rightarrow x = 14$$

7. Calcular el valor de x para que los dos conjuntos de capitales financieros siguientes sean equivalentes, de acuerdo con la ley financiera unitaria que se indica:

$$A = \{(10.000,6); (12.000,10)\}$$

$$B = \{(14.000,12); (x, 13)\}$$

$$L(t;p) = 1 + 0{,}10(p-t),\ p = 13$$

Resolución

Sabemos que dos conjuntos de capitales financieros son equivalentes cuando lo son sus correspondientes capitales suma en un mismo punto. Por tanto, calculando la suma en p de los capitales de cada conjunto, tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$(S_A, p = 13) = (10.000,6) + (12.000,10) \Rightarrow S_A = 10.000[1 + 0,10(13 - 6)] + \\ + 12.000[1 + 0,10(13 - 10)] = 32.600$$

$$(S_B, p = 13) = (14.000,12) + (x, 13) \Rightarrow S_B = 14.000[1 + 0,10(13 - 12)] + \\ + x[1 + 0,10(13 - 13)] = 15.400 + x \Rightarrow 32.600 = 15.400 + x \Rightarrow x = 17.200$$

8. Sabemos que los siguientes conjuntos de capitales financieros son equivalentes: $A = \{(100.000,8); (150.000,12)\}$ y $B = \{(x, y - 4); (200.000, y)\}$. Además, también son equivalentes los capitales $(200.000, y)$ y $(160.000,10)$. Si la ley financiera unitaria a aplicar es: $L(t; p) = 1 + 0,10(p - t)$, $p = 20$, calcular x.

Resolución

Por ser equivalentes los capitales $(200.000, y)$ y $(160.000,10)$, se verifica:

$$160.000[1 + 0,10(20 - 10)] + 200.000[1 + 0,10(20 - y)] \Rightarrow y = 14$$

Ahora tenemos que $B = \{(x, 10); (200.000, 14)\}$. Al ser los dos conjuntos equivalentes, podemos calcular la suma financiera correspondiente a los capitales de cada uno e igualar:

$$100.000(1 + 0,10 \times 12) + 150.000(1 + 0,10 \times 8) = x(1 + 0,10 \times 10) + \\ + 200.000(1 + 0,10 \times 6) \Rightarrow x = 85.000$$

9. Dada la ley financiera unitaria $L(t; p) = a + k(p - t)$, $p = 15$, sabemos que la suma financiera de los capitales $(50.000,2)$ y $(75.000,6)$, calculada en el punto 10, vale 195.000. Con la ley indicada, para el capital $(100.000,8)$ su cuantía equivalente en 12 vale: *a*) 240.000; *b*) 150.000; *c*) 160.000; *d*) 170.000.

Resolución

Hemos de hallar la cuantía x tal que $(x, 12) \sim (100.000,8)$. Para ello necesitamos conocer el valor de a y el de k. Por ser $L(t; t) = 1$, se deduce: $a + k(t - t) = 1 \Rightarrow a = 1$, por lo que la ley a utilizar es $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $t < p = 15$. Además, se verifica: $(50.000,2) + (75.000,6) = (195.000,10)$, por lo que podemos plantear la siguiente ecuación:

$$50.000[1 + k(15 - 2)] + 75.000[1 + k(15 - 6)] = \\ = 195.000[1 + k(15 - 10)] \Rightarrow k = 0,20$$

© Ediciones Pirámide

De $(x, 12) \sim (100.000,8)$ se deduce la siguiente ecuación de equivalencia financiera: $x[1 + 0{,}2(15 - 12)] = 100.000[1 + 0{,}2(15 - 8)] \Rightarrow x = 150.000$. Por tanto, la solución es la correspondiente a la alternativa *b*.

10. Los capitales (15.000,5) y (20.000,10) son equivalentes de acuerdo con ley financiera unitaria $L(t; p) = h + k(p - t)$, $t < p = 15$. La cuantía x de la suma financiera calculada en el punto 8 de los capitales (2.000,4), (5.000,6) y (8.000,9), es: *a*) $15.580 < x < 15.595$; *b*) $18.390 < x < 18.405$; *c*) $26.480 < x < 26.495$; *d*) $12.467 < < x < 12.473$.

Resolución

Para calcular x necesitamos conocer el valor de h y el de k. Por ser $L(t; t) = 1$, se deduce: $h + k(t - t) = 1 \Rightarrow h = 1$, por lo que la ley a utilizar es $L(t; p) = 1 + + k(p - t)$, $t < p = 15$. Además, se verifica: $(15.000,5) \sim (20.000,10)$, por lo que podemos plantear la siguiente ecuación de equivalencia financiera: $15.000[1 + + k(15 - 5)] = 20.000[1 + k(15 - 10)] \Rightarrow k = 0{,}10$. Además:

$$(x, 8) = (2.000,4) + (5.000,6) + (8.000,9) \Rightarrow$$
$$\Rightarrow x[1 + 0{,}10(15 - 8)] = 2.000[1 + 0{,}10(15 - 4)] + 5.000[1 + 0{,}10(15 - 6)] + + 8.000[1 + 0{,}10(15 - 9)] \Rightarrow x = 15.588{,}24$$

Por tanto, la solución corresponde a la alternativa *a*.

1.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (210,15) y (208,17).

2. Establecer el orden de preferencia entre los capitales financieros: (300,38), (290,38) y (310,37).

3. Calcular el capital equivalente en 11 del capital con vencimiento en 8 y cuantía 400.000 €. La ley financiera unitaria es: $A(t; p) = a - 0{,}10(t - p)$, $p = 2$.

4. Hemos de pagar los capitales (8.000,10) y (12.000,13). Proponemos a nuestro acreedor abonarle únicamente (20.000,15). ¿Aceptará nuestra propuesta?

5. Establecer las condiciones que debe cumplir la función $f(t; p) = \dfrac{1}{1 + kp + ht}$ para ser una ley financiera unitaria de descuento.

6. Con ley financiera unitaria $L(t; p) = a + b(p - t)$, $t < p = 14$, los capitales (6.000,4) y (10.000,10) son equivalentes. La cuantía x de la suma financiera calcu-

© Ediciones Pirámide

lada en el punto 6 de los capitales (3.000,3), (4.000,5) y (6.000,9) es: *a*) 12.610 < $< x <$ 12.620; *b*) 32.790 $< x <$ 32.810; *c*) 32.775 $< x <$ 32.785; *d*) 12.600 $< x <$ 12.605.

7. Determinar el valor de x para que los dos conjuntos de capitales financieros siguientes sean equivalentes, de acuerdo con la ley financiera unitaria que se indica:

$$A = \{(10.000,8); (400.000,12)\}$$

$$B = \{(200.000,10); (x, 14)\}$$

$$L(t; p) = 1 + 0{,}15(p - t),\ p = 18$$

© Ediciones Pirámide

2 Conceptos básicos (II)

OBJETIVOS

- Entender el concepto y las características de las operaciones financieras.
- Identificar las distintas modalidades de operaciones financieras.
- Comprender y aplicar el postulado de equivalencia financiera como criterio de equilibrio en toda operación financiera.
- Entender el concepto de saldo financiero y su interpretación económica.
- Aprender a determinar el saldo financiero de una operación.

SUMARIO

2.1. Operaciones financieras: concepto y características.
2.2. Clasificación de las operaciones financieras.
2.3. Postulado de equivalencia financiera.
2.4. Saldo financiero.
2.5. Ejercicios y problemas resueltos.
2.6. Ejercicios y problemas propuestos.

2.1. OPERACIONES FINANCIERAS: CONCEPTO Y CARACTERÍSTICAS

Cualquier sujeto económico puede disponer en un determinado momento de recursos financieros y decidir invertirlos para obtener unos rendimientos futuros. De esta forma entrega un cierto capital financiero, que recuperará en el futuro conjuntamente con los rendimientos que el mismo le produzca. Por ejemplo, adquiere un piso por importe de 120.000 €, y lo vende al cabo de 4 años por 145.000 €. Podemos señalar que la operación ha supuesto intercambiar el capital financiero (120.000,0) por el capital (145.000,4). También cualquier sujeto puede solicitar préstamos con el fin de disponer de liquidez para atender sus necesidades de consumo y/o inversión. De esta forma, dicho sujeto percibe un capital financiero que se obliga a devolver en el futuro, además de pagar una determinada cuantía por su utilización. Por ejemplo, le prestan 60.000 €, que se obliga a devolver mediante dos pagos con vencimiento dentro de un año y dentro de dos, por importes respectivos de 35.000 y 31.000 euros. La operación ha supuesto intercambiar el capital financiero (60.000,0) por los capitales (35.000,1) y (31.000,2).

Las dos operaciones anteriores han supuesto intercambiar capitales financieros de distintos vencimientos. En general, en la actividad económica se llevan a cabo intercambios de capitales financieros, cediendo unos en determinados momentos y percibiendo otros en momentos distintos. Tales intercambios de capitales financieros con distintos vencimientos constituyen operaciones financieras.

En general, constituye una operación financiera[1] **«toda acción que intercambia o sustituye unos capitales financieros por otros de distintos vencimientos; o más abreviadamente, todo cambio no simultáneo de capitales».**

[1] Gil Peláez (1987: 25).

© Ediciones Pirámide

Los intercambios de capitales financieros no se realizan de forma arbitraria, sino que es preciso señalar un criterio financiero de valoración de tales capitales. Por ello podemos entender por operación financiera[2] **«todo intercambio de capitales financieros que se realiza de acuerdo con un criterio financiero de valoración».**

En consecuencia, es necesario destacar que en toda operación financiera ha de transcurrir cierto tiempo entre los vencimientos de los capitales financieros que la constituyen, lo que implica la no simultaneidad de los intercambios. Así, por ejemplo, una operación de compraventa al contado no constituye una operación financiera en el sentido aquí expuesto, pues se trata de un intercambio de capitales con idéntico vencimiento. En cambio, constituye una operación financiera la compraventa con pago inicial de una parte del precio y el resto de forma aplazada, ya que se produce un intercambio de capitales financieros con distintos vencimientos.

Teniendo en cuenta el concepto de capital financiero, también podemos señalar que[3] **«en la vida real la operación financiera se presenta como un cambio no simultáneo de bienes económicos, efectuado entre dos personas naturales o jurídicas».**

De acuerdo con lo expuesto, en toda operación financiera intervienen sujetos económicos que intercambian capitales financieros con distintos vencimientos. Por ello, podemos señalar como **características fundamentales** de toda operación financiera las siguientes:

a) **Sujetos económicos** que intervienen en la operación. En toda operación financiera intervienen dos partes (personas físicas o jurídicas), que son los elementos subjetivos. La persona que inicia la operación entregando el primer capital se denomina **acreedor inicial o prestamista.** El otro sujeto, es decir, el que recibe el primer capital, se llama **deudor inicial o prestatario.**

b) **Dos conjuntos de capitales financieros que se intercambian,** denominados **prestación** y **contraprestación,** que constituyen los elementos objetivos. La prestación está formada por todos los capitales que se compromete a entregar la parte que inicia la operación (el acreedor inicial o prestamista). En cambio, la contraprestación la integra el conjunto de capitales que se compromete a entregar el deudor inicial o prestatario. En general:

$$\text{Prestación: } \{(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots, (C_m, t_m)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(C'_1, t'_1), (C'_2, t'_2), \ldots, (C'_n, t'_n)\}$$

[2] Meneu et al. (1994: 11).
[3] Gil Peláez (1987: 47).

© Ediciones Pirámide

Conforme a lo señalado, como el primer capital pertenece a la prestación, ha de ser $t_1 < t'_1$, mientras que el último capital puede pertenecer a la prestación, siendo $t_m > t'_n$, o bien a la contraprestación, verificándose $t_m < t'_n$.

c) **Duración de la operación.** El vencimiento del primer capital constituye el **origen** de la operación, mientras que el vencimiento del último es el **final** de la misma. El tiempo que transcurre entre el origen y el final se denomina **duración** de la operación. Tal y como hemos señalado, el primer capital forma parte del conjunto prestación, mientras que el último capital pertenecerá a la prestación o a la contraprestación. En la hipótesis de que el último capital pertenezca a la contraprestación, podemos representar gráficamente una operación financiera de la siguiente forma:

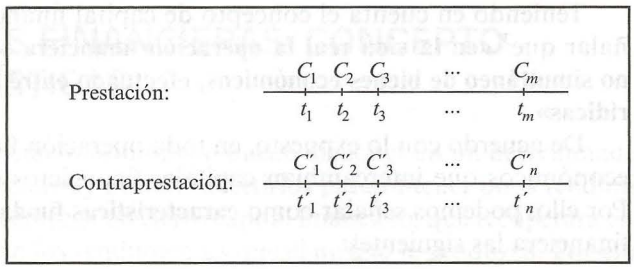


Figura 2.1.

En el gráfico anterior, el origen es el punto t_1, mientras que el final es el t'_n. La duración es la diferencia $t'_n - t_1$.

d) **Ley financiera de valoración.** El acuerdo de intercambio de capitales financieros que realizan los sujetos de la operación debe efectuarse pactando un criterio financiero de valoración.

Según lo expuesto, una operación financiera supone para cada uno de sus sujetos la entrega de un conjunto de capitales financieros o conjunto de pagos, para recibir otro conjunto de capitales o conjunto de cobros. El acreedor inicial o prestamista comienza la operación efectuando un pago, y el conjunto de todos los que realiza, que son cobros para el otro sujeto, constituye la prestación de la operación. En cambio, el deudor inicial recibe el primer cobro, y el conjunto de todos los pagos que se compromete a realizar, que serán cobros para el otro sujeto, se llama contraprestación. Dicho de otro modo, la prestación está formada por el conjunto de capitales financieros en el que está el primer capital que se intercambia, siendo el otro conjunto de capitales la contraprestación.

© Ediciones Pirámide

En consecuencia, dos sujetos económicos llevarán a cabo una operación financiera estableciendo un acuerdo sobre las cuantías y los vencimientos de los capitales a intercambiar, y fijando el criterio financiero mediante el cual se valoran tales capitales. Acordar el criterio financiero de valoración implica definir la ley concreta de valoración, así como el punto p de aplicación de la misma.

2.2. CLASIFICACIÓN DE LAS OPERACIONES FINANCIERAS

De entre los diversos criterios que se pueden utilizar para clasificar las operaciones financieras, vamos a destacar los siguientes:

a) Por el **número de capitales** que intervienen se distingue entre **operaciones elementales o simples** y **operaciones compuestas.** Cuando hay un solo capital tanto en la prestación como en la contraprestación, la operación es simple; por ejemplo, el descuento bancario de una letra, por el que el prestatario recibe una cuantía en un determinado momento, debiendo satisfacer otra con posterioridad.

Cuando hay varios capitales en la prestación y/o en la contraprestación, la operación es compuesta. En estas operaciones se puede distinguir entre operaciones de amortización, operaciones de constitución y operaciones doblemente compuestas.

En las operaciones compuestas de amortización, la prestación está integrada por un solo capital y por varios en la contraprestación. Por ejemplo, un préstamo por el cual el deudor inicial recibe una cuantía de dinero, comprometiéndose a abonar diversas cantidades en el futuro. Si bien la mayoría de las operaciones de amortización son de contraprestación múltiple, también se contratan operaciones de amortización simples. Por ejemplo, un préstamo por el cual el deudor inicial recibe una determinada cantidad de dinero, comprometiéndose a abonar como contraprestación una sola cuantía en una fecha futura.

En las operaciones compuestas de constitución, la prestación está integrada por varios capitales y la contraprestación sólo por uno. Por ejemplo, una cuenta de ahorro vivienda en la cual se van depositando cuantías en una entidad de crédito para disponer de su suma financiera transcurrido un cierto tiempo. Aunque la gran mayoría de operaciones de constitución lo son de prestación múltiple y contraprestación única, también se pueden pactar operaciones con el calificativo de constitución, por las que se entrega un solo capital para recibir en el futuro otro equivalente.

Las operaciones doblemente compuestas están integradas por varios capitales tanto en la prestación como en la contraprestación. Un ejemplo es el de una cuenta bancaria de crédito, por la cual el deudor va disponiendo de cuantías que le

© Ediciones Pirámide

presta una entidad de crédito, y también va realizando aportaciones a dicha cuenta a fin de disminuir su deuda.

En cualquier caso, lo que interesa de una operación financiera, según el número de capitales que la integran, no es el nombre que se le dé (de amortización o de constitución), sino la distribución temporal de los compromisos que las partes contraen.

b) Por la **forma de definición,** se distingue entre operaciones predeterminadas y operaciones posdeterminadas. Cuando desde el momento inicial se conocen las cuantías de todos los capitales y sus vencimientos, la operación es **predeterminada;** por ejemplo, una imposición a plazo fijo, por la que un cliente de una entidad financiera entrega a ésta una cuantía que la misma se compromete a devolver, mediante un capital financiero equivalente, en un vencimiento futuro previamente establecido.

Cuando algunas de las cuantías de los capitales o sus vencimientos sólo pueden conocerse una vez finalice la operación, la misma se denomina **posdeterminada.** Por ejemplo, una operación de préstamo en la que las cuantías que ha de pagar el deudor inicial son desconocidas, fijándose las mismas en función de la evolución de algún índice.

c) Por el **tipo de criterio financiero,** se distingue entre operaciones de descuento, operaciones de capitalización y operaciones mixtas. En las **operaciones de descuento** la ley financiera pactada es una ley de descuento, por lo que el punto p de aplicación de la misma es igual o anterior al primer vencimiento. Si la ley pactada es **de capitalización,** también lo es la operación, siendo el punto p igual o posterior al último vencimiento. Y es **mixta** cuando una parte de la operación se valora con un criterio de capitalización, mientras que la otra parte se valora con un criterio de descuento, por lo que el punto p está situado entre el primer vencimiento y el último.

2.3. POSTULADO DE EQUIVALENCIA FINANCIERA

Supongamos dos sujetos económicos que desean llevar a cabo entre sí una operación financiera, es decir, intercambiarse dos conjuntos de capitales financieros. Una de las cuestiones que se plantearán es la siguiente: ¿cuáles son las condiciones que deben verificar ambos conjuntos para poderlos intercambiar?

Una de las condiciones es que los compromisos de ambos sujetos, plasmados en los capitales financieros que integran los conjuntos a intercambiar, sean financieramente equivalentes; o lo que es lo mismo, ha de existir un equilibrio bilateral entre sus compromisos. Por tanto, una vez acordado el criterio financiero de valoración, lo que entrega una de las partes ha de ser financie-

© Ediciones Pirámide

ramente equivalente a lo que entrega la otra. En consecuencia, los conjuntos prestación y contraprestación han de ser equivalentes, de modo que sus correspondientes capitales suma en un mismo momento del tiempo tendrán idéntico valor.

Todo lo expuesto queda sintetizado en el *postulado o principio de equivalencia financiera:* **en toda operación financiera ha de verificarse la equivalencia entre el conjunto de capitales de la prestación y el conjunto de capitales de la contraprestación, de acuerdo con un criterio financiero de valoración.** Por tanto, fijado un criterio financiero de valoración, en cualquier momento del tiempo de duración de la operación la suma financiera de los capitales de la prestación ha de coincidir con la suma financiera de los capitales de la contraprestación: $S = S'$, siendo S la suma financiera en un punto de todos los capitales de la prestación, y S' la suma financiera en el mismo punto de todos los capitales de la contraprestación.

La igualdad de sumas financieras se puede plantear en cualquier momento del tiempo, siendo, no obstante, más sencillo plantearla en el origen de la operación, en el punto p o en el final de la misma, según la operación.

EJERCICIO 2.1

Las personas A y B acuerdan realizar la operación financiera definida por los conjuntos siguientes:

A entrega los capitales: {(80.000,0); (50.000,3)}

B entrega los capitales: {(40.000,1); (20.000,4); (X, 7)}

Sabiendo que la ley de valoración pactada es $L(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$, $p = 8$, calcular el valor de X.

Resolución

De acuerdo con el postulado de equivalencia financiera, los dos conjuntos de capitales que definen las obligaciones de las partes han de ser equivalentes; es decir, fijado un momento del tiempo, la suma financiera de los capitales del conjunto prestación, formado por los capitales que entrega A, ha de coincidir con la suma financiera de los capitales del conjunto contraprestación, formado por los capitales que entrega B. Si planteamos la igualdad de sumas, por ejemplo en 8 tenemos:

$$(S, 8) = (80.000,0) + (50.000,3)$$

$$(S', 8) = (40.000,1) + (20.000,4) + (X, 7)$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta el concepto de suma financiera:

$$S[1 + 0{,}05(8 - 8)] = 80.000[1 + 0{,}05(8 - 0)] + 50.000[1 + 0{,}05(8 - 3)]$$

$$S'[1 + 0{,}05(8 - 8)] = 40.000[1 + 0{,}05(8 - 1)] + 20.000[1 + 0{,}05(8 - 4)] + X[1 + 0{,}05(8 - 7)]$$

Como $S = S'$, queda:

$$80.000[1 + 0{,}05(8 - 0)] + 50.000[1 + 0{,}05(8 - 3)] = 40.000[1 + 0{,}05(8 - 1)] + 20.000[1 + 0{,}05(8 - 4)] + X[1 + 0{,}05(8 - 7)] \Rightarrow X = 91.904{,}76$$

EJERCICIO 2.2

Una operación financiera se valora con la siguiente ley: $A(t; p) = 1 - 0{,}08(t - p)$, $p = 0$, siendo los capitales de la misma:

Prestación: {(500.000,0)}

Contraprestación: {(100.000,1); (X, 3)}

Determinar la cuantía X.

Resolución

Planteamos la equivalencia financiera en el origen:

$$500.000 = 100.000[1 - 0{,}08(1 - 0)] + X[1 - 0{,}08(3 - 0)] \Rightarrow X = 536.842{,}11$$

2.4. SALDO FINANCIERO

Hemos señalado que en cualquier operación financiera los compromisos de las partes han de ser equivalentes. Si no lo fuesen, los sujetos de la misma no estarían dispuestos a realizarla. Ahora bien, dichos sujetos van entregando y recibiendo capitales a lo largo de la duración de la operación, pero en cualquier momento antes del vencimiento cualquiera de los sujetos habrá entregado, en valor financiero en dicho momento, más de lo recibido, siendo importante determinar el valor de cuánto le falta por recibir. Para ello se introduce el concepto de saldo financiero o **reserva matemática** de una operación financiera.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 2.3

Una operación financiera se valora con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}03(p - t)$, $p = 10$. Los capitales que la integran son:

$$\text{Prestación: } \{(400.000,0); (200.000,1)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(100.000,3); (100.000,4); (150.000,6); (X, 7)\}$$

Determinar el valor de X y el saldo de la operación en el punto 5.

Resolución

Para determinar X aplicamos el postulado de equivalencia financiera en 10. La ecuación de equivalencia es:

$$400.000[1 + 0{,}03(10 - 0)] + 200.000[1 + 0{,}03(10 - 1)] = 100.000[1 + 0{,}03$$

$$(10 - 3)] + 100.000[1 + 0{,}03(10 - 4)] + 150.000[1 + 0{,}03(10 - 6)] +$$

$$+ X[1 + 0{,}03(10 - 7)] \Rightarrow X = 336.697{,}25$$

Hasta el momento 5 los sujetos se han intercambiado los capitales correspondientes. Nos planteamos la siguiente cuestión: ¿cuánto vale en 5 lo que ha entregado cada sujeto? Para responder, calculamos la suma financiera en dicho punto de los capitales ya entregados. Denominando $(S_1, 5)$ a la suma financiera en 5 de los capitales con vencimiento igual o anterior a 5 que forman parte de la prestación, y $(S'_1, 5)$ a la correspondiente suma de los de la contraprestación, tenemos:

$$(S_1, 5) = (400.000,0) + (200.000,1)$$

$$(S'_1, 5) = (100.000,3) + (100.000,4)$$

Y de acuerdo con el concepto de suma financiera se tiene:

$$S_1[1 + 0{,}03(10 - 5)] = 400.000[1 + 0{,}03(10 - 0)] + 200.000[1 + 0{,}03(10 - 1)]$$

$$S'_1[1 + 0{,}03(10 - 5)] = 100.000[1 + 0{,}03(10 - 3)] + 100.000[1 + 0{,}03(10 - 4)]$$

$$S_1 = 673.043{,}48; \quad S'_1 = 207.826{,}09$$

La diferencia entre el valor financiero en 5 de lo que un sujeto ha entregado y lo que ha recibido constituye el saldo financiero o reserva matemática de la operación en 5:

$$R_5 = S_1 - S'_1 = 673.043{,}48 - 207.826{,}09 = 465.217{,}39$$

© Ediciones Pirámide

Veamos el planteamiento general. Supongamos para ello una operación financiera cualquiera y q un momento del intervalo temporal de duración de la misma. Por el postulado de equivalencia financiera se verifica en q la igualdad entre el valor financiero del conjunto de capitales de la prestación y el valor financiero de los capitales de la contraprestación: $S = S'$.

Podemos descomponer las sumas anteriores en dos sumandos, recogiendo el primero la suma de los capitales vencidos hasta q, y el segundo la de los capitales con vencimientos posteriores a q:

$$\left.\begin{array}{l} S = S_1 + S_2 \\ S' = S'_1 + S'_2 \end{array}\right\} \Rightarrow S_1 + S_2 = S'_1 + S'_2 \Rightarrow S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2$$

siendo:

- S_1: suma financiera en q de los capitales de la prestación con vencimiento igual o anterior a q, o, lo que es lo mismo, suma financiera en q de la prestación pasada o vencida.
- S_2: suma financiera en q de los capitales de la prestación con vencimiento posterior a q, o, lo que es lo mismo, suma financiera en q de la prestación futura o pendiente de vencimiento.
- S'_1: suma financiera en q de los capitales de la contraprestación con vencimiento igual o anterior a q, o sea, suma financiera en q de la contraprestación pasada o vencida.
- S'_2: suma financiera en q de los capitales de la contraprestación con vencimiento posterior a q, o sea, suma financiera en q de la contraprestación futura o pendiente de vencimiento.

Gráficamente, tenemos:

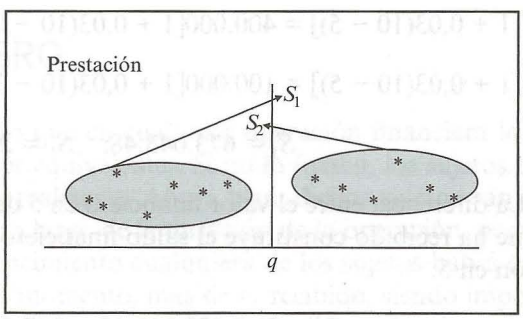


Figura 2.2.

© Ediciones Pirámide

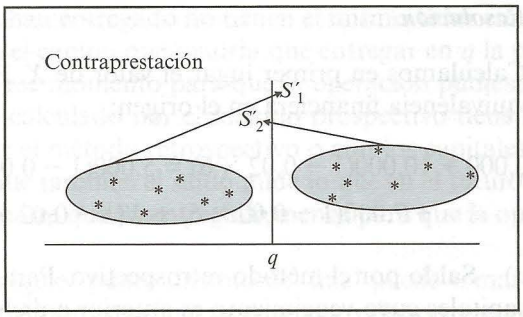


Figura 2.3.

Hemos visto que se verifica $S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2$. Estas diferencias nos permiten introducir el concepto de saldo financiero o reserva matemática. Así, el saldo financiero en q o reserva matemática en q nos indica la diferencia, valorada en dicho punto, entre las cuantías de los capitales equivalentes en q a la prestación y contraprestación pasadas. También nos indica la diferencia de los capitales equivalentes en q a la contraprestación y prestación futuras:

$$R_q = S_1 - S'_1 = S'_2 - S_2$$

Por tanto, **el saldo financiero o reserva matemática es el capital que mide, en un determinado momento, la diferencia financiera entre los compromisos ya cumplidos por las partes, o entre los que faltan por cumplir.**

De la ecuación anterior se deduce que el mismo se puede calcular por dos métodos, los cuales obviamente conducen al mismo resultado:

a) **Método retrospectivo:** diferencia financiera entre los compromisos pasados o vencidos: $R_q = S_1 - S'_1$.

b) **Método prospectivo:** diferencia financiera entre los compromisos futuros o pendientes de vencimiento: $R_q = S'_2 - S_2$.

EJERCICIO 2.4

Determinada operación financiera se pacta con el criterio de valoración siguiente: $A(t; p) = 1 - 0{,}02(t - p)$, $p = 0$. Los capitales que la integran son:

Prestación: {(20.000,0); (10.000,6)}

Contraprestación: {(5.000,2)}; (6.000,3); (7.000,5); (X, 9)}

Determinar por ambos métodos el saldo en 4.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Calculamos en primer lugar el valor de X. Para ello planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$20.000 + 10.000(1 - 0{,}02 \times 6) = 5.000(1 - 0{,}02 \times 2) + 6.000(1 - 0{,}02 \times 3) +$$
$$+ 7.000(1 - 0{,}02 \times 5) + X(1 - 0{,}02 \times 9) \Rightarrow X = 14.707{,}32$$

a) Saldo por el método retrospectivo. Para ello calculamos la suma en 4 de los capitales cuyo vencimiento es anterior a dicho punto:

$$(S_1, 4) = (20.000{,}0)$$

$$(S_1', 4) = (5.000{,}2) + (6.000{,}3)$$

Y en consecuencia, se verifica:

$$S_1(1 - 0{,}02 \times 4) = 20.000 \Rightarrow S_1 = 21.739{,}13$$

$$S_1'(1 - 0{,}02 \times 4) = 5.000(1 - 0{,}02 \times 2) + 6.000(1 - 0{,}02 \times 3) \Rightarrow S_1' = 11.347{,}83$$

$$R_4 = S_1 - S_1' = 21.739{,}13 - 11.347{,}83 = 10.391{,}30$$

b) Saldo por el método prospectivo. Calculamos la suma en 4 de los capitales cuyo vencimiento es posterior a dicho momento:

$$(S_2, 4) = (10.000{,}6)$$

$$(S_2', 4) = (7.000{,}5) + (14.707{,}32; 9)$$

Realizando las operaciones correspondientes obtenemos:

$$S_2(1 - 0{,}02 \times 4) = 10.000(1 - 0{,}02 \times 6) \Rightarrow S_2 = 9.565{,}22$$

$$S_2'(1 - 0{,}02 \times 4) = 7.000(1 - 0{,}02 \times 5) + 14.707{,}32(1 - 0{,}02 \times 9) \Rightarrow S_2' = 19.956{,}52$$

$$R_4 = S_2' - S_2 = 19.956{,}52 - 9.565{,}22 = 10.391{,}30$$

Vemos que, efectivamente, por ambos métodos el saldo o reserva matemática en 4 tiene idéntico valor: 10.391,30. La cuantía del saldo nos indica el valor en 4 de lo que el prestamista ha entregado en exceso sobre lo que ha recibido.

En general, si en el momento q se fuese a cancelar la operación financiera, de acuerdo con el mismo criterio financiero pactado inicialmente, como los capitales

© Ediciones Pirámide
© Ediciones

que ambos sujetos han entregado no tienen el mismo valor en dicho momento, el saldo financiero es el capital que tendría que entregar en q la parte que ha entregado menos hasta ese momento para que la operación pudiese quedar saldada.

Como el saldo calculado por el método prospectivo tiene idéntico valor que el determinado por el método retrospectivo o con los capitales vencidos hasta q, podemos señalar que también el saldo mide lo que en el futuro habrá de entregar adicionalmente la parte que ha entregado menos para que la operación quede con saldo cero al final.

El saldo en cualquier punto distinto del final puede tomar un valor positivo, nulo o negativo. En el momento final ha de tomar valor cero, ya que la operación verifica el postulado de equivalencia financiera, tal y como hemos señalado, por lo que la diferencia entre las sumas financieras de la prestación y de la contraprestación es nula.

Cuando el saldo es positivo, el valor financiero de la prestación pasada supera al de la contraprestación vencida; cuando es negativo sucede lo contrario:

$$R_q > 0 \Rightarrow S_1 - S_1' > 0 \Rightarrow S_1 > S_1'$$

$$R_q < 0 \Rightarrow S_1 - S_1' < 0 \Rightarrow S_1 < S_1'$$

Por tanto, **si el saldo es positivo,** constituye un capital **a favor de la prestación pasada,** pues es el sujeto prestamista quien ha entregado, en valor financiero, mayor cuantía. Cuando el **saldo sea negativo,** constituye su valor absoluto un capital **a favor de la contraprestación pasada,** ya que ha sido la parte que ha entregado un mayor valor financiero.

Cuando en el punto en el que se calcule el saldo venza algún capital, distinguimos entre **saldo a la izquierda** (R_q^-) y **saldo a la derecha** (R_q^+). El saldo a la izquierda es el calculado antes de que la cuantía correspondiente haya vencido. En cambio, el saldo a la derecha es el calculado después de que la cuantía citada haya vencido.

Para calcular el saldo a la izquierda de un punto, entre los capitales vencidos no se incluye el capital que venza en dicho punto. En cambio, sí se incluye entre los capitales futuros. Para calcular el saldo a la derecha de un punto, entre los capitales vencidos se ha de incluir el capital con vencimiento en dicho punto, por lo que no se le incluye entre los capitales pendientes de vencimiento.

EJERCICIO 2.5

Una operación financiera está formada por los siguientes capitales:

Prestación: {(800,0); (600,1)}

Contraprestación: {(100,3); (400,4); (600,5); (800,6); (X, 9)}

© Ediciones Pirámide

El criterio de valoración financiera pactado es: $A(t; p) = 1 - 0{,}10(t - p)$, $p = 0$. Determinar el saldo financiero por ambos métodos a la izquierda de 5, y a la derecha de 6.

Resolución

Para determinar el valor de X planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$800 + 600(1 - 0{,}10 \times 1) = 100(1 - 0{,}10 \times 3) + 400(1 - 0{,}10 \times 4) + 600(1 - 0{,}10 \times 5) + 800(1 - 0{,}10 \times 6) + X(1 - 0{,}10 \times 9) \Rightarrow X = 4.100$$

a) Saldo a la izquierda de 5 por el método retrospectivo. Para ello calculamos las sumas a la izquierda de 5, o sea, las sumas financieras de los capitales cuyos vencimientos son anteriores a 5:

$$(S_1^-, 5) = (800,0) + (600,1)$$

$$(S_1'^-, 5) = (100,3) + (400,4)$$

Por tanto, se verifica:

$$S_1^-(1 - 0{,}10 \times 5) = 800(1 - 0{,}10 \times 0) + 600(1 - 0{,}10 \times 1) \Rightarrow S_1^- = 2.680$$

$$S_1'^-(1 - 0{,}10 \times 5) = 100(1 - 0{,}10 \times 3) + 400(1 - 0{,}10 \times 4) \Rightarrow S_1^- = 620$$

$$R_5^- = S_1^- - S_1'^- = 2.680 - 620 = 2.060$$

En consecuencia, el saldo en 5, antes de entregar el capital con ese vencimiento, vale 2.060 y es favorable al prestamista.

b) Saldo a la izquierda de 5 por el método prospectivo. Calculamos la suma a la izquierda de 5 de los capitales, tanto de la prestación como de la contraprestación, cuyos vencimientos son iguales o posteriores a 5:

$$\left.\begin{array}{l}(S_2^-, 5) = (0,5) \\ (S_2'^-, 5) = (600,5) + (800,6) + (4.100,9)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}S_2^- = 0 \\ S_2'^- = 2.060\end{array}\right\} \Rightarrow R_5^- = S_2'^- - S_2^- = 2.060 - 0 = 2.060$$

Naturalmente, el valor del saldo coincide al calcularse por cualquiera de los dos métodos.

© Ediciones Pirámide

c) Saldo a la derecha de 6 por el método retrospectivo. Hemos de calcular el saldo una vez haya vencido el capital con vencimiento en 6, por lo que se le incluirá en la contraprestación pasada y no en la futura. Así, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}(S_1^+, 6) = (800,0) + (600,1) \\ (S_1'^+, 6) = (100,3) + (400,4) + (600,5) + (800,6)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}S_1^+ = 3.350 \\ S_1'^+ = 2.325\end{array}\right\} \Rightarrow R_6^+ =$$

$$= S_1^+ - S'^+_1 = 3.350 - 2.325 = 1.025$$

d) Saldo a la derecha de 6 por el método prospectivo. Tal y como hemos señalado, al calcular el saldo a la derecha de un punto, el capital con vencimiento en dicho punto ya ha vencido, por lo que no se le incluye entre los capitales futuros. Por ello, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l}(S_2^+, 6) = (0,6) \\ (S_2'^+, 6) = (4.100,9)\end{array}\right\} \Rightarrow \left.\begin{array}{l}S_2^+ = 0 \\ S_2'^+ = 1.025\end{array}\right\} \Rightarrow R_6^+ = S_2'^+ - S_2^+ = 1.025 - 0 = 1.025$$

Vemos que el saldo, una vez se ha entregado el capital con vencimiento en 6, es favorable al prestamista. Por ello, la suma financiera en 6 de los capitales futuros que ha de entregar la contraprestación es mayor que la suma en 6 de los capitales futuros de la prestación.

2.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Los capitales que forman parte de una operación financiera pactada con la ley $L(t; p) = (1 + 0{,}04)^{p-t}$ son:

Prestación: {(100.000,0); (120.000,2)}

Contraprestación: {(200.000,5); (X, 6)}

Determinar el valor de X.

Resolución

Por el postulado de equivalencia financiera se ha de cumplir la equivalencia entre los dos conjuntos citados:

© Ediciones Pirámide

$$100.000 \times 1{,}04^{p} + 120.000 \times 1{,}04^{p-2} = 200.000 \times 1{,}04^{p-5} + X \times 1{,}04^{p-6} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow X = 58.914{,}93$$

2. Una operación financiera se valora con la ley $L(t; p) = a + 0{,}10(p - t)$, $p = 15$. Los capitales que la forman son:

Prestación: $\{(X, 3); (4.000{,}6); (5.000{,}9)\}$

Contraprestación: $\{(4.750{,}4)\}; (Y, 10)\}$

Determinar X e Y, sabiendo que el saldo a la izquierda de 6 es favorable a la contraprestación por valor de 3.050.

Resolución

De acuerdo con las propiedades de las leyes financieras, se ha de verificar: $L(t; t) = 1 = a + 0{,}10(t - t) \Rightarrow a = 1 \Rightarrow L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$. Por otra parte, el saldo a la izquierda de 6 favorable a la contraprestación implica que toma un valor negativo: $R_6^- = -3.050 = S_1^- - S_1'^-$. Teniendo en cuenta que $(S_1^-, 6) = (X, 3)$ y $(S_1'^-, 6) = (4.750{,}4)$, al realizar operaciones se llega a: $S_1^- = \frac{2{,}2X}{1{,}9}$; $S_1'^- = -5.250$, por lo que podemos plantear la ecuación:

$$R_6^- = -3.050 = S_1^- - S_1'^- = \frac{2{,}2X}{1{,}9} - 5.250 \Rightarrow X = 1.900$$

¿Por qué es negativo?

Teniendo en cuenta el valor de X, de la ecuación de equivalencia financiera entre el conjunto prestación y contraprestación, deduciremos el valor de Y:

$$1.900(1 + 0{,}10 \times 12) + 4.000(1 + 0{,}10 \times 9) + 5.000(1 + 0{,}10 \times 6) =$$
$$= 4.750(1 + 0{,}10 \times 11) + Y(1 + 0{,}10 \times 5) \Rightarrow Y = 6.536{,}67$$

3. Los capitales que integran una operación financiera son:

Prestación: $\{(100.000{,}1); (400.000{,}3)\}$

Contraprestación: $\{(150.000{,}4); (X, 8); (100.000{,}9)\}$

La ley de valoración es: $F(t; p) = \begin{cases} 1 + 0{,}05(p - t), & t < p = 7 \\ 1 - 0{,}06(t - p), & t > p = 7 \end{cases}$

Determinar: *a*) saldo a la izquierda de 3 por el método prospectivo; *b*) saldo a la derecha de 8 por el método retrospectivo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

a) Para calcular el saldo a la izquierda de 3 por el método prospectivo necesitamos determinar el valor de X, el cual se deduce de la ecuación de equivalencia entre la prestación y la contraprestación:

$$100.000[1 + 0{,}05(7 - 1)] + 400.000[1 + 0{,}05(7 - 3)] = 150.000[1 + 0{,}05(7 - 4)] +$$
$$+ X[1 - 0{,}06(8 - 7)] + 100.000[1 - 0{,}06(9 - 7)] \Rightarrow X = 371.808{,}51$$

El saldo a la izquierda de 3 por el método prospectivo es: $R_3^- = S_2'^- - S_2^-$, siendo:

$$(S_2^-, 3) = (400.000{,}3) \Rightarrow S_2^- = 400.000$$

$$(S_2'^-, 3) = (150.000{,}4) + (371.808{,}51; 8) + (100.000{,}9)$$

Al realizar las correspondientes operaciones se obtiene el valor a la izquierda de 3 de la contraprestación futura y el del saldo correspondiente en dicho punto: $S_2'^- = 508.333{,}33 \Rightarrow R_3^- = S_2'^- - S_2^- = 508.333{,}33 - 400.000 = 108.333{,}33$. Podemos comprobar el valor obtenido calculando nuevamente dicho saldo, ahora por el método retrospectivo:

$$\left.\begin{array}{l} R_3^- = S_1^- - S_1'^- \\ (S_1^-, 3) = (100.000{,}1) \Rightarrow S_1^- = 108.333{,}33 \\ (S_1'^-, 3) = (0{,}3) \Rightarrow S_1'^- = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow R_3^- = 108.333{,}33 - 0 = 108.333{,}33$$

b) El saldo a la derecha de 8 por el método retrospectivo es: $R_8^+ = S_1^+ - S_1'^+$, siendo:

$$\left.\begin{array}{l} (S_1^+, 8) = (100.000{,}1) + (400.000{,}3) \Rightarrow S_1^+ = 648.936{,}17 \\ (S_1'^+, 8) = (150.000{,}4) + (371.808{,}51; 8) \Rightarrow S_1'^+ = 555.319{,}15 \end{array}\right\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow R_8^+ = 648.936{,}17 - 555.319{,}15 = 93.617{,}02$$

Podemos comprobar el valor anterior calculándolo por el método prospectivo:

$$\left.\begin{array}{l} R_8^+ = S_2'^+ - S_2^+ \\ (S_2^+, 8) = (0{,}8) \Rightarrow S_2^+ = 0 \\ (S_2'^+, 8) = (100.000{,}9) \Rightarrow S_2'^+ = 93.617{,}02 \end{array}\right\} \Rightarrow R_8^+ = 93.617{,}02 - 0 = 93.617{,}02$$

© Ediciones Pirámide

4. En la siguiente operación financiera, calcular el valor de X, sabiendo que el saldo a la izquierda de 4 es favorable a la prestación por una cuantía de 27.392,86:

$$\text{Prestación: } \{(12.000,1);\ (18.000,2)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(5.000,3);\ (8.000,4);\ (X,\ 6)\}$$

La ley de valoración es: $L(t;\ p) = 1 + k(p - t)$, $p = 7$.

Resolución

Conociendo el valor de la reserva a la izquierda de 4 podemos plantear la ecuación correspondiente y obtener el valor de k:

$$\left.\begin{array}{l} R_4^- = S_1^- - S_1'^- = 27.392,86 \\ (S_1^-,\ 4) = (12.000,1) + (18.000,2) \\ (S_1'^-,\ 4) = (5.000,3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$S_1^-(1 + 3k) = 12.000(1 + 6k) + 18.000(1 + 5k) \Rightarrow S_1^- = \frac{30.000 + 162.000k}{1 + 3k}$$

$$S_1'^-(1 + 3k) = 5.000(1 + 4k) \Rightarrow S_1'^- \frac{5.000 + 20.000k}{1 + 3k}$$

$$R_4^- = S_1^- - S_1'^- = 27.392,86 = \frac{30.000 + 162.000k}{1 + 3k} - \frac{5.000 + 20.000k}{1 + 3k} \Rightarrow k = 0,04 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow L(t;\ p) = 1 + 0,04(p - t)$$

Y al plantear la ecuación de equivalencia financiera entre la prestación total y la contraprestación total, se llega al valor de X:

$$12.000(1 + 0,04 \times 6) + 18.000(1 + 0,04 \times 5) = 5.000(1 + 0,04 \times 4) +$$
$$+ 8.000(1 + 0,04 \times 3) + X(1 + 0,04 \times 1) \Rightarrow X = 20.884,62$$

5. Una operación financiera se valora con la ley $L(t;\ p) = 1 + 0,06(p - t)$, $p =$ $= 10$. Los capitales que se intercambian son los siguientes:

$$\text{Prestación: } \{(15.000,0);\ (Z,\ 1)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(10.000,3);\ (X,\ 4);\ (Y,\ 6)\}$$

Se sabe que la suma financiera en 10 de los capitales $(X,\ 4)$ e $(Y,\ 6)$ vale 33.400. Determinar el saldo a la izquierda de 4 por el método retrospectivo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Para calcular el saldo pedido hemos de conocer el valor de Z. Teniendo en cuenta la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación, se verifica: $(15.000,0) + (Z, 1) = (10.000,3) + (X, 4) + (Y, 6)$. Además, se cumple: $(X, 4) + (Y, 6) = (33.400,10)$. En consecuencia, la ecuación de equivalencia queda con una sola incógnita:

$$(15.000,0) + (Z, 1) = (10.000,3) + (33.400,10) \Rightarrow 15.000(1 + 0{,}06 \times 10) +$$

$$+ Z(1 + 0{,}06 \times 9) = 10.000(1 + 0{,}06 \times 7) + 33.400(1 + 0{,}06 \times 0) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow Z = 15.324{,}68$$

En cuanto al saldo, tenemos:

$$\left.\begin{array}{l} R_4^- = S_1^- - S_1'^- \\ (S_1^-, 4) = (15.000,0) + (15.324{,}68; 1) \\ (S_1'^-, 4) = (10.000,3) \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow S_1^- = 35.000{,}01;\ S_1'^-\ 10.441{,}18 \Rightarrow R_4^- = 24.558{,}83$$

6. En una operación financiera pactada con la ley $A(t; p) = 1 - k(t - p)$, $p = 0$, los capitales de la prestación son: {(1.000,0); (1.100,2); (3.000,7)}. De la contraprestación se conocen los siguientes datos: {(900,3); (1.200,4); $(X, 8)$; $(Y, 9)$}. Hallar todos los capitales de la contraprestación, sabiendo que el saldo a la izquierda de 6 vale 1.325, favorable a la prestación, y a la derecha 675 favorable a la contraprestación, siendo $X + Y = 5.300$.

Resolución

Planteamos la ecuación del saldo a la izquierda de 6 para así obtener el valor de k:

$$\left.\begin{array}{l} R_6^- = S_1^- - S_1'^- = 1.325 \\ (S_1^-, 6) = (1.000,0) + (1.100,2) \\ (S_1'^-, 6) = (900,3) + (1.200,4) \end{array}\right\} \Rightarrow S_1^- = \frac{2.100 - 2.200k}{1 - 6k};\ S_1'^- = \frac{2.100 - 7.500k}{1 - 6k}$$

$$1.325 = \frac{2.100 - 2.200k}{1 - 6k} - \frac{2.100 - 7.500k}{1 - 6k} \Rightarrow k = 0{,}10$$

Por ser $R_6^- \neq R_6^+$, en 6 vence un capital. Como a la izquierda de 6 el saldo es favorable a la prestación y a la derecha lo es a la contraprestación, el capital con vencimiento en 6 pertenece a la contraprestación. Sea C_6' su cuantía. Planteando las ecuaciones del saldo a la izquierda y a la derecha, tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$\left.\begin{aligned} R_6^- &= S_1^- - S_1'^- = 1.325 \\ R_6^+ &= S_1^- - (S_1'^- + C_6') = -675 \end{aligned}\right\} \Rightarrow C_6' = 2.000$$

En consecuencia, la contraprestación es: {(900,3); (1.200,4); (2.000,6); (X, 8); (Y, 9)}.

Para obtener X e Y planteamos la ecuación de equivalencia financiera entre prestación y contraprestación:

$$1.000 + 1.100(1 - 0{,}10 \times 2) + 3.000(1 - 0{,}10 \times 7) = 900(1 - 0{,}10 \times 3) +$$
$$+ 1.200(1 - 0{,}10 \times 4) + 2.000(1 - 0{,}10 \times 6) + X(1 - 0{,}10 \times 8) + Y(1 - 0{,}10 \times 9)$$

Y teniendo en cuenta que $X + Y = 5.300$, se obtiene finalmente: $X = 1.000$; $Y = 4.300$.

2.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los capitales que forman una operación financiera son:

Prestación: {(1.000,3); (4.000,6); (5.000,9)}

Contraprestación: {(4.000,4); (Y, 10)}

Sabiendo que la ley de valoración a aplicar es: $L(t; p) = a + 0{,}10(p - t)$, $p = 15$, el saldo X calculado en 5 vale: *a*) $3.090 < X < 3.110$; *b*) $-3.110 < X < -3.090$; *c*) $6.190 < X < 6.210$; *d*) $-6.210 < X < -6.190$.

2. Cierta operación financiera se valora con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}05(p - t)$, $p = 10$. Los capitales de dicha operación son:

Prestación: {(1.000,0); (1.400,2)}

Contraprestación: {(X, 4); (900,5); (Y, 8)}

Sabemos que la suma financiera en 9 de los capitales (900,5) e (Y, 8) vale 2.304,76. Hallar X e Y.

3. En una determinada operación financiera, el saldo a la derecha del momento 10 vale 8.000. Si en dicho momento el prestatario ha de entregar una cuantía de 2.000, el saldo a la izquierda de 10 vale: *a*) 8.000; *b*) con los datos facilitados no es posible calcular el saldo; *c*) 10.000; *d*) 6.000.

© Ediciones Pirámide

4. Los capitales que integran una operación financiera son:

Prestación: $\{(300.000,0); (Z, 2)\}$

Contraprestación: $\{(X, 1); (200.000,3); (Y, 7)\}$

La ley de valoración es: $F(t; p) = \begin{cases} 1 + 0{,}10(p - t), & t < p = 4 \\ 1 - 0{,}09(t - p), & t > p = 4 \end{cases}$

Determinar Z, X e Y, sabiendo que el saldo a la izquierda de 2 vale 241.666,67, y a la derecha de 3 es favorable a la prestación por valor de 609.090,91.

5. Una persona entrega a cierta entidad financiera, al principio de cada trimestre de un determinado año, 20.000 €, retirando al final de cada semestre del mismo año 22.000 €. Las imposiciones se valoran con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, y los reintegros con la ley $L(t; p) = 1 + 0{,}14(p - t)$, siendo el punto p el final del año y estando expresados los valores de t y p en años. El saldo X al final del año vale: *a*) $36.500 < X < 37.000$; *b*) $39.000 < X < 39.500$; *c*) $40.000 < X < 40.500$; *d*) $77.000 < X < 77.500$.

© Ediciones Pirámide

3 Magnitudes financieras

OBJETIVOS

- Entender el concepto de magnitudes financieras.
- Identificar las distintas modalidades de magnitudes financieras.
- Determinar el valor de diversas magnitudes financieras, aplicando tanto leyes de capitalización como de descuento.
- Comprender el significado económico de las diversas magnitudes financieras.

SUMARIO

3.1. Introducción.
3.2. Factores, réditos y tantos en leyes de capitalización.
3.3. Factores, réditos y tantos en leyes de descuento.
3.4. El precio financiero.
3.5. Ejercicios y problemas resueltos.
3.6. Ejercicios y problemas propuestos.

3.1. INTRODUCCIÓN

Para ser capaces de analizar y resolver la problemática vinculada a las operaciones financieras, en su vertiente cuantitativa, resulta adecuado estudiar las diversas magnitudes financieras que se obtienen a partir de las magnitudes fundamentales. En este sentido, la cuantía C y el tiempo t hasta su vencimiento, componentes de un capital financiero, constituyen las **magnitudes financieras fundamentales.**

Además de las magnitudes financieras fundamentales ya citadas, podemos analizar las **magnitudes derivadas,** obtenidas al realizar operaciones con aquéllas. Así, por ejemplo, si tenemos derecho a cobrar el capital financiero (2.000,2), y convenimos con nuestro deudor en recibir su equivalente en 15, por ejemplo el capital de cuantía 4.600, la relación por cociente entre ambas cuantías, o sea, 2,3, constituye una magnitud derivada que nos indica el capital equivalente en 15 por cada unidad de capital con vencimiento en 2. También constituye una magnitud derivada la diferencia de cuantías, o sea, 2.600, que nos pone de manifiesto el incremento absoluto por el diferimiento en el vencimiento de la deuda inicial en 2.

Las magnitudes derivadas de mayor importancia son: factores, réditos, tantos y precio financiero. Su análisis lo vamos a realizar tanto para leyes de capitalización como para leyes de descuento[1].

3.2. FACTORES, RÉDITOS Y TANTOS EN LEYES DE CAPITALIZACIÓN

Para una ley de capitalización, dos capitales equivalentes $[(C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)]$ verifican: $C_1 \times L(t_1; p) = C_2 \times L(t_2; p)$. De acuerdo con lo que ya conocemos, si

[1] Para un estudio más amplio, puede consultarse: Gil Peláez (1987: 59).

© Ediciones Pirámide

$t_2 > t_1$, también ha de ser $C_2 > C_1$. Partiendo de la ecuación de equivalencia precedente, vamos a introducir los conceptos de factores, réditos y tantos.

A) Factores

Dados dos capitales equivalentes, **el factor asociado a un cierto intervalo temporal es el número por el que hay que multiplicar la cuantía del capital situado en un extremo de dicho intervalo para obtener la cuantía del capital equivalente con vencimiento en el otro extremo.** Vamos a distinguir entre el factor de capitalización y el factor de contracapitalización.

Denominando $u(t_1, t_2; p)$ al **factor de capitalización** asociado al intervalo temporal (t_1, t_2), tenemos:

$$C_2 = C_1 \times u(t_1, t_2; p) \Rightarrow u(t_1, t_2; p) = \frac{C_2}{C_1}$$

Y teniendo en cuenta la ecuación de equivalencia entre ambos capitales, se llega a:

$$u(t_1, t_2; p) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} > 1$$

De las expresiones precedentes deducimos que el factor de capitalización nos indica el capital equivalente en t_2 por unidad de capital disponible en t_1. En efecto, para una cuantía unitaria del primer capital tenemos:

$$C_2 = 1 \times u(t_1, t_2; p) \Rightarrow C_2 = u(t_1, t_2; p)$$

EJERCICIO 3.1

Para la ley financiera $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, $p = 12$, determinar el factor de capitalización correspondiente al intervalo temporal de extremos 4 y 7.

Resolución

De acuerdo con lo expuesto, tenemos:

$$u(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} = u(t_1 = 4, t_2 = 7; p = 12) = \frac{1 + 0{,}10(12 - 4)}{1 + 0{,}10(12 - 7)} = 1{,}2$$

En consecuencia, de los datos anteriores se deduce que por cada unidad de capital con vencimiento en 4, su equivalente en 7 vale 1,2.

© Ediciones Pirámide

Del factor de capitalización se obtiene otra magnitud: el factor de contracapitalización. Así, **al inverso del factor de capitalización se le denomina factor de contracapitalización o de capitalización anticipada:**

$$u^*(t_1, t_2; p) = \frac{1}{u(t_1, t_2; p)} = \frac{C_1}{C_2} = \frac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)} < 1$$

El factor de contracapitalización nos indica el capital equivalente en t_1 por unidad de capital, disponible en t_2. En efecto, para una cuantía unitaria del segundo capital tenemos:

$$C_1 = 1 \times u^*(t_1, t_2; p) \Rightarrow C_1 = u^*(t_1, t_2; p)$$

EJERCICIO 3.2

Para la ley financiera $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 12$, el factor de capitalización asociado al intervalo (3,7) vale 1,4. Determinar el factor de contracapitalización correspondiente al intervalo (5,8).

Resolución

De la expresión del factor correspondiente al intervalo (3,7) se deduce:

$$u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 12) = \frac{1 + k(12 - 3)}{1 + k(12 - 7)} = 1{,}4 \Rightarrow k = 0{,}20$$

Y en consecuencia, para el factor de contracapitalización asociado al intervalo (5,8) tenemos:

$$u^*(t_1 = 5, t_2 = 8; p = 12) = \frac{L(8; p)}{L(5; p)} = \frac{1 + 0{,}20(12 - 8)}{1 + 0{,}20(12 - 5)} = 0{,}75$$

B) Réditos

Dados dos capitales equivalentes, hemos deducido que el factor de capitalización correspondiente toma un valor superior a la unidad. Ello nos permite indicar que **el rédito de capitalización asociado a un determinado intervalo temporal es el suplemento a la unidad del correspondiente factor de capitalización:**

$$r(t_1, t_2; p) = u(t_1, t_2; p) - 1$$

© Ediciones Pirámide

Y sustituyendo por las expresiones correspondientes del factor, tenemos:

$$r(t_1, t_2; p) = \frac{C_2}{C_1} - 1 = \frac{C_2 - C_1}{C_1}$$

$$r(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} - 1 = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_2; p)}$$

En consecuencia, el rédito de capitalización correspondiente a un cierto intervalo temporal representa la variación, por unidad de capital inicial, de dos capitales equivalentes. Dicha variación tiene vencimiento al final del intervalo, ya que es donde vence el factor de capitalización.

Partiendo del factor de contracapitalización asociado a un determinado intervalo temporal, que sabemos toma un valor inferior a la unidad, podemos definir el **rédito de contracapitalización, o de capitalización anticipada,** como **el complemento a la unidad del correspondiente factor de contracapitalización:**

$$r^*(t_1, t_2; p) = 1 - u^*(t_1, t_2; p)$$

$$r^*(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 - C_1}{C_2}$$

$$r^*(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)} = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_1; p)}$$

De acuerdo con las expresiones precedentes, el rédito de contracapitalización o de capitalización anticipada correspondiente a un cierto intervalo temporal, representa la variación de dos capitales equivalentes por unidad de capital final. Como el factor de contracapitalización, del que se deriva el rédito de contracapitalización, tiene vencimiento al inicio del intervalo temporal considerado, la variación absoluta que representa el rédito de contracapitalización también tiene vencimiento al principio del intervalo.

Hemos señalado que el rédito de capitalización asociado a un cierto intervalo temporal es un capital con vencimiento al final del mismo. Por ello, podemos calcular su equivalente o proyección en p, lo que nos permite definir el **rédito acumulado o referido a p como la proyección en p del rédito de capitalización:**

$$\xi(t_1, t_2; p) = Proy_p\,[r(t_1, t_2; p), t_2] = r(t_1, t_2; p) \times L(t_2; p)$$

Y teniendo en cuenta la expresión correspondiente del rédito de capitalización en función de la ley financiera, queda:

$$\xi(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_2; p)} \times L(t_2; p)$$

$$\xi(t_1, t_2; p) = L(t_1; p) - L(t_2; p)$$

© Ediciones Pirámide

También se verifica que el rédito acumulado es la proyección en p del rédito de contracapitalización:

$$\xi(t_1, t_2; p) = Proy_p\,[r^*(t_1, t_2; p), t_1] = r^*(t_1, t_2; p) \times L(t_1; p) = L(t_1; p) - L(t_2; p)$$

EJERCICIO 3.3

Dada la ley financiera $L(t; p) = 1 + 0{,}01(p^2 - t^2)$, $p = 15$, determinar los réditos de capitalización, de contracapitalización y acumulado, correspondientes al intervalo temporal $t_1 = 3$, $t_2 = 7$.

Resolución

Determinamos los correspondientes factores y, a partir de ellos, los réditos:

$$u(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} = u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = \frac{1 + 0{,}01(15^2 - 3^2)}{1 + 0{,}01(15^2 - 7^2)} = 1{,}1449$$

$$u^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = \frac{1}{u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15)} = \frac{1}{1{,}1449} = 0{,}8734$$

$$r(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = u(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) - 1 = 0{,}1449$$

$$r^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = 1 - u^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = 0{,}1266$$

Podemos observar que por cada unidad con vencimiento en 3, su equivalente en 7 vale $u(t_1 = 3, t_2 = 7; p) = 1{,}1449 = 1 + r(t_1 = 3, t_2 = 7; p)$. Asimismo, por cada unidad con vencimiento en 7, su equivalente en 3 vale $u^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p) = 0{,}8734 = 1 - r^*(t_1 = 3, t_2 = 7; p) = 1 - 0{,}1266$.

En cuanto al rédito acumulado o referido a p, se tiene:

$$\xi(t_1 = 3, t_2 = 7; p = 15) = L(t_1; p) - L(t_2; p) =$$
$$= [1 + 0{,}01(15^2 - 3^2)] - [1 + 0{,}01(15^2 - 7^2)] = 0{,}4$$

C) Tantos

Dados dos capitales equivalentes, denominamos **tanto correspondiente a un cierto intervalo temporal al cociente entre el rédito y la amplitud de dicho intervalo temporal.** En consecuencia, tal y como hemos hecho para el rédito, podemos distinguir entre tanto de capitalización y tanto de contracapitalización o de capitalización anticipada.

© Ediciones Pirámide

El **tanto de capitalización** asociado a un cierto intervalo temporal viene dado por el cociente entre el correspondiente rédito de capitalización y la amplitud de dicho intervalo temporal:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{r(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$$

Y teniendo en cuenta las expresiones del rédito de capitalización, se verifica:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{C_2 - C_1}{(t_2 - t_1)C_1}$$

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

Sabemos que el rédito de capitalización representa la variación, por unidad de capital inicial, de dos capitales equivalentes, teniendo dicha variación vencimiento al final del intervalo. En consecuencia, podemos señalar que el tanto de capitalización correspondiente a un intervalo temporal representa la variación de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo. Dicha variación tiene vencimiento al final del intervalo al que se refiere.

El **tanto de contracapitalización o de capitalización anticipada** asociado a un cierto intervalo temporal, viene dado por el cociente entre el correspondiente rédito de contracapitalización y la amplitud del citado intervalo temporal:

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{r^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$$

Teniendo en cuenta las expresiones del rédito de contracapitalización, se verifica:

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{C_2 - C_1}{(t_2 - t_1)C_2}$$

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

Sabemos que el rédito de contracapitalización representa la variación, por unidad de capital final, de dos capitales equivalentes, teniendo dicha variación vencimiento al principio del intervalo. En consecuencia, podemos señalar que el tanto de contracapitalización correspondiente a un intervalo temporal representa la variación de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y

© Ediciones Pirámide

promedio por unidad de tiempo. Dicha variación tiene vencimiento al inicio del intervalo temporal al que se refiere.

En consecuencia, y de acuerdo con lo expuesto, cualquier tanto representa una variación de cuantía por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo.

EJERCICIO 3.4

Dada la ley financiera $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, $p = 12$, determinar el tanto de capitalización y el de capitalización anticipada para el intervalo temporal $t_1 = 3$, $t_2 = 5$.

Resolución

Podemos determinar los factores del intervalo temporal citado, para a continuación calcular los réditos, obteniendo de ellos los tantos pedidos; o bien sustituir directamente en las expresiones de los tantos. Seguiremos este procedimiento:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_2; p)}$$

$$\rho(t_1 = 3, t_2 = 5; p = 12) = \frac{[1 + 0{,}10(12 - 3)] - [1 + 0{,}10(12 - 5)]}{(5 - 3)[1 + 0{,}10(12 - 5)]} = 0{,}0588$$

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

$$\rho^*(t_1 = 3, t_2 = 5; p = 12) = \frac{[1 + 0{,}10(12 - 3)] - [1 + 0{,}10(12 - 5)]}{(5 - 3)[1 + 0{,}10(12 - 3)]} = 0{,}0526$$

Se ha puesto de manifiesto que para determinar el tanto de capitalización correspondiente a un cierto intervalo temporal, es preciso considerar la amplitud del mismo, por lo que, tal y como hemos señalado, el tanto expresa una variación de cuantía por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo. Por ello, si el tanto representa un promedio por unidad de tiempo, cabe preguntarse qué sucede a medida que la amplitud del intervalo temporal se modifica. En concreto, ¿qué ocurre cuando la amplitud tiende a cero? Para dar respuesta a la cuestión anterior partimos de la expresión del tanto de capitalización en función de la ley financiera para un intervalo temporal $(t, t + h)$:

$$\rho(t, t + h; p) = \frac{L(t; p) - L(t + h; p)}{h \times L(t + h; p)}$$

© Ediciones Pirámide

Cuando la amplitud del intervalo temporal tiende a cero, el correspondiente tanto se denomina **tanto instantáneo,** simbolizándose por $\rho(t; p)$:

$$\rho(t; p) = \lim_{h \to 0} \rho(t, t + h; p) = \lim_{h \to 0} \frac{L(t; p) - L(t + h; p)}{h \times L(t + h; p)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-[L(t + h; p) - L(t; p)]}{h} \times \frac{1}{L(t + h; p)}$$

Si la ley financiera viene dada por una función derivable, en la expresión anterior el límite del primer factor es la derivada parcial de la ley con respecto a t, por lo que nos queda:

$$\rho(t; p) = -\frac{\partial L(t; p)}{\partial t} \times \frac{1}{L(t; p)} = -\frac{\partial \log_e L(t; p)}{\partial t}$$

Hemos señalado que el tanto de capitalización asociado a un intervalo temporal nos indica la variación entre las cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo. Pues bien, cuando la amplitud del citado intervalo temporal es un infinitésimo, o sea, tiende a cero, dicho tanto es instantáneo.

El significado financiero del tanto instantáneo es el mismo que el del tanto de capitalización, pero asociado a un intervalo temporal infinitesimal, por lo que representa una variación relativa de cuantías en cada instante de tiempo. Por tanto, fijado el valor del punto p, el tanto instantáneo es una función de la variable tiempo x:

$$\rho(x; p) = -\frac{\partial \log_e L(x; p)}{\partial x}$$

En la hipótesis de que sea una función integrable en el intervalo (t, p) resulta:

$$\int_t^p \rho(x; p) \times dx = \int_t^p -\frac{\partial \log_e L(x; p)}{\partial x} \times dx = -[\log_e L(x; p)]_t^p =$$

$$= -[\log_e L(p; p) - \log_e L(t; p)] = -\log_e 1 + \log_e L(t; p) = \log_e L(t; p)$$

Y al despejar deducimos una expresión general para obtener cualquier ley financiera en función del tanto instantáneo:

$$L(t; p) = e^{\int_t^p \rho(x; p) \times dx}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 3.5

Determinar la ley financiera de capitalización cuyo tanto instantáneo es $\rho(t; p) = 0{,}04t^3$.

Resolución

Calculamos $\int_t^p \rho(x; p) \times dx$ y después sustituimos en la ecuación precedente:

$$\int_t^p \rho(x; p) \times dx = \int_t^p 0{,}04x^3 \times dx = [0{,}01x^4]_t^p = 0{,}01(p^4 - t^4)$$

$$L(t; p) = e^{0{,}01(p^4 - t^4)}$$

3.3. FACTORES, RÉDITOS Y TANTOS EN LEYES DE DESCUENTO

Tal y como hemos visto con las leyes de capitalización, vamos a estudiar las magnitudes derivadas más destacadas en la hipótesis de que la equivalencia de capitales se plantee mediante una ley de descuento. Así, supongamos que, de acuerdo con una ley de descuento, tenemos dos capitales equivalentes $(C_1, t_1) \sim (C_2, t_2)$, verificándose, por tanto, $C_1 \times A(t_1; p) = C_2 \times A(t_2; p)$. De acuerdo con lo que ya conocemos, si $t_2 > t_1$ también ha de ser $C_2 > C_1$. Partiendo de la ecuación de equivalencia precedente vamos a introducir los conceptos de factores, réditos y tantos con leyes de descuento.

A) Factor de descuento

Dados dos capitales equivalentes, el factor de descuento correspondiente a un determinado intervalo temporal **es el número por el cual hay que multiplicar la cuantía del capital situado en el extremo superior del intervalo para obtener la cuantía del capital equivalente con vencimiento en el extremo inferior.**

Denominando $v(t_1, t_2; p)$ al **factor de descuento** asociado al intervalo temporal (t_1, t_2), tenemos:

$$C_1 = C_2 \times v(t_1, t_2; p) \Rightarrow v(t_1, t_2; p) = \frac{C_1}{C_2}$$

Y teniendo en cuenta la ecuación de equivalencia entre ambos capitales, se llega a:

© Ediciones Pirámide

$$v(t_1, t_2; p) = \frac{C_1}{C_2} = \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} < 1$$

De las expresiones precedentes deducimos que el factor de descuento nos indica el capital equivalente en t_1 por unidad de capital disponible en t_2. En efecto, para una cuantía unitaria del capital con vencimiento al final, tenemos:

$$C_1 = 1 \times v(t_1, t_2; p) \Rightarrow C_1 = v(t_1, t_2; p)$$

Es importante destacar cómo con leyes de capitalización, en las que $t < p$, **el factor de capitalización** permite hallar el equivalente de un capital en un punto **posterior** a su vencimiento, mientras que con leyes de descuento, en las que $p < t$, **el factor de descuento** permite calcular el equivalente de un capital en un punto **anterior** a su vencimiento.

B) Rédito de descuento

Dados dos capitales equivalentes, el factor de descuento correspondiente toma un valor inferior a la unidad. Ello nos permite indicar que **el rédito de descuento asociado a un determinado intervalo temporal es el complemento a la unidad del correspondiente factor de descuento:**

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - v(t_1, t_2; p)$$

Y al sustituir las expresiones correspondientes del factor, tenemos:

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{C_1}{C_2} = \frac{C_2 - C_1}{C_2}$$

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} = \frac{A(t_1; p) - A(t_2; p)}{A(t_1; p)}$$

En consecuencia, el rédito de descuento, correspondiente a un cierto intervalo temporal, representa la variación por unidad de capital final de dos capitales equivalentes. Dicha variación tiene vencimiento al principio del intervalo, ya que es donde vence el factor de descuento.

C) Tantos

Dados dos capitales equivalentes, denominamos **tanto de descuento correspondiente a un cierto intervalo temporal al cociente entre el rédito de descuento y la amplitud de dicho intervalo temporal:**

© Ediciones Pirámide

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1}$$

Y teniendo en cuenta las expresiones del rédito de descuento, se verifica:

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{C_2 - C_1}{(t_2 - t_1)C_2}$$

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{A(t_1; p) - A(t_2; p)}{(t_2 - t_1)A(t_1; p)}$$

Sabemos que el rédito de descuento representa la variación, por unidad de capital final, de dos capitales equivalentes, teniendo dicha variación vencimiento al principio del intervalo. En consecuencia, podemos señalar que el tanto de descuento correspondiente a un intervalo temporal representa la variación de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo. Dicha variación tiene vencimiento al inicio del intervalo al que se refiere.

EJERCICIO 3.6

Dada la ley financiera $A(t; p) = 1 - 0{,}08(t - p)$, $p = 2$, determinar el factor, el rédito y el tanto de descuento asociado al intervalo temporal $t_1 = 5$, $t_2 = 9$.

Resolución

De acuerdo con las expresiones deducidas, se verifica:

$$v(t_1, t_2; p) = \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} = v(t_1 = 5, t_2 = 9; p = 2) = \frac{1 - 0{,}08(9 - 2)}{1 - 0{,}08(5 - 2)} = 0{,}578947$$

$$d(t_1 = 5, t_2 = 9; p = 2) = 1 - v(t_1 = 5, t_2 = 9; p = 2) = 1 - 0{,}578947 = 0{,}421053$$

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}421053}{9 - 5} = 0{,}105263$$

De igual forma a lo realizado con leyes de capitalización, hemos puesto de manifiesto que para determinar el tanto de descuento correspondiente a un cierto intervalo temporal es preciso considerar la amplitud del mismo, por lo que el tanto expresa una variación de cuantía por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo. Por ello cabe preguntarse qué sucede a medida que la amplitud del intervalo temporal se modifica. En concreto, ¿qué ocurre cuando la amplitud tiende a cero? Para dar respuesta a la cuestión anterior, partimos de la expresión del tanto de descuento en función de la ley financiera para un intervalo temporal $(t, t + h)$:

© Ediciones Pirámide

$$\delta(t, t+h; p) = \frac{A(t; p) - A(t+h; p)}{h \times A(t; p)}$$

Cuando la amplitud del intervalo temporal tiende a cero, el correspondiente tanto de descuento se denomina **tanto instantáneo,** simbolizándose por $\delta(t; p)$:

$$\delta(t; p) = \lim_{h \to 0} \delta(t, t+h; p) = \lim_{h \to 0} \frac{A(t; p) - A(t+h; p)}{h \times A(t; p)} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-[A(t+h; p) - A(t; p)]}{h} \times \frac{1}{A(t; p)}$$

En la hipótesis de que la ley financiera de descuento sea una función derivable, el límite del primer factor correspondiente a la expresión anterior es la derivada parcial de la ley con respecto a t:

$$\delta(t; p) = -\frac{\partial A(t; p)}{\partial t} \times \frac{1}{A(t; p)} = -\frac{\partial \log_e A(t; p)}{\partial t}$$

Hemos señalado que el tanto de descuento correspondiente a un determinado intervalo temporal nos indica la variación entre las cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo. Pues bien, cuando la amplitud del citado intervalo temporal es un infinitésimo, es decir, tiende a cero, dicho tanto es instantáneo.

El significado financiero del tanto instantáneo es el mismo que el del tanto de descuento, pero asociado a un intervalo temporal infinitesimal, por lo que representa una variación relativa de cuantías en cada instante de tiempo. Por tanto, fijado el valor del punto p, el tanto instantáneo es una función de la variable tiempo x:

$$\delta(x; p) = -\frac{\partial \log_e A(x; p)}{\partial x}$$

En la hipótesis de que sea una función integrable en el intervalo (p, t), resulta:

$$\int_p^t \delta(x; p) \times dx = \int_p^t -\frac{\partial \log_e A(x; p)}{\partial x} \times dx = -[\log_e A(x; p)]_p^t =$$

$$= -[\log_e A(t; p) - \log_e A(p; p)] = -\log_e A(t; p) + \log_e 1 = -\log_e A(t; p)$$

Y al despejar obtenemos una expresión general para cualquier ley financiera de descuento en función de su tanto instantáneo:

$$A(t; p) = e^{-\int_p^t \delta(x; p) \times dx}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 3.7

Determinar la ley financiera de descuento cuyo tanto instantáneo es $\delta(t; p) = 0{,}02t$.

Resolución

Calculamos $\int_p^t \delta(x; p) \times dx$ y después sustituimos en la ecuación precedente:

$$\int_p^t \delta(x; p) \times dx = \int_p^t 0{,}02x \times dx = [0{,}01x^2]_p^t = 0{,}01(t^2 - p^2)$$

$$A(t; p) = e^{-0{,}01(t^2 - p^2)}$$

3.4. EL PRECIO FINANCIERO

Sabemos que el intercambio de bienes y servicios llevado a cabo entre dos sujetos económicos conlleva el abono, por parte de uno de dichos sujetos, del precio correspondiente. En línea con ello, y teniendo en cuenta, tal y como hemos señalado, que cualquier operación financiera constituye un cambio no simultáneo de bienes económicos, podemos señalar que a una operación financiera también es posible asociarle un precio: **el precio financiero.** Se puede distinguir entre distintas modalidades de precio financiero[2]: precio financiero total, precio financiero unitario y precio financiero medio. La utilidad de las modalidades citadas está en conocer el precio que se deriva de cualquier operación financiera, así como poder comparar distintas operaciones financieras en función de su precio, y optar por la que consideremos óptima.

Vamos a definir las modalidades de precio citadas para una operación financiera simple, realizándose su adaptación a las operaciones financieras compuestas en los capítulos correspondientes dedicados a las mismas.

En general, el **precio financiero total** asociado a una operación financiera integrada por el intercambio de dos capitales financieros viene dado por la diferencia aritmética de las cuantías de dichos capitales. Así, para la operación financiera definida por:

Prestación: $\{(C_1, t_1)\}$

Contraprestación: $\{(C_2, t_2)\}$

[2] Rodríguez (1994: 39).

© Ediciones Pirámide

en la que, obviamente, los capitales han de ser equivalentes, el precio financiero total es: $P_F = C_2 - C_1$. Valorándose la operación con una ley financiera de capitalización, el precio financiero total se denomina **interés total:** $I = C_2 - C_1$. Y si la operación se valorase con una ley de descuento, el precio financiero total recibe el nombre de **descuento:** $D = C_2 - C_1$. Es preciso resaltar cómo el concepto es el mismo y la diferencia está en la ley con la que se valoran los capitales: cuando sea de capitalización, hablamos de interés, y le denominamos descuento en el otro caso.

A) Operación valorada con una ley de capitalización

a) *Precio pospagable*

De la expresión del interés total se deduce: $C_2 = C_1 + I$, por lo que podemos decir que el precio financiero total o intereses constituyen el precio pospagable a pagar al final del intervalo temporal por disponer durante el mismo de la cuantía del capital inicial, siendo la cuantía I la de un capital (I, t_2) con vencimiento al final del intervalo.

Teniendo en cuenta que $C_2 = C_1 \times u(t_1, t_2; p)$, entonces: $I = C_1 \times u(t_1, t_2; p) - C_1$. De donde obtenemos el precio financiero total o interés pospagable: $I = C_1[u(t_1, t_2; p) - 1] = C_1 \times r(t_1, t_2; p)$.

Al dividir los intereses totales entre la cuantía del capital inicial obtenemos el **precio financiero unitario:** $\frac{I}{C_1} = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = r(t_1, t_2; p)$. En consecuencia, el rédito de capitalización es un precio financiero unitario e indica el interés por unidad de capital inicial, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial.

Si dividimos el precio financiero unitario entre la amplitud del intervalo temporal obtenemos la expresión correspondiente al **precio financiero medio:** $\frac{I}{C_1(t_2 - t_1)} = \frac{C_2 - C_1}{C_1(t_2 - t_1)} = \frac{r(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \rho(t_1, t_2; p)$. Por consiguiente, el tanto de capitalización es un precio financiero medio e indica el interés por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, es decir, la diferencia de cuantía de dos capitales equivalentes por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo.

Vemos, pues, que el precio financiero medio o tanto representa el aumento que se genera por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, o sea, es el **precio a pagar por disponer de la unidad de capital durante la unidad de tiempo.** En la práctica se le llama **tipo de interés.** Por ejemplo, decir que en una operación financiera el tipo de interés es de 2 céntimos trimestrales, significa que el interés de la unidad de capital inicial en un trimestre es 0,02 €. Normalmente, el tipo de interés viene expresado en porcentaje. Así, en el caso anterior hablaríamos del 2%

© Ediciones Pirámide

trimestral, por lo que el interés de 100 € iniciales, en un trimestre, es de 2 euros, con vencimiento al final del mismo.

EJERCICIO 3.8

Determinar el interés pospagable, el precio financiero unitario y el precio financiero medio, correspondiente al intervalo temporal (4,9), del capital (3.200,4), siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}12(p - t)$, $p = 10$.

Resolución

Podemos determinar el precio financiero total de dos formas. En la primera calculamos el factor de capitalización correspondiente al intervalo citado y sustituimos en la expresión:

$$I = C_1[u(t_1, t_2; p) - 1] = 3.200\left[\frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} - 1\right] =$$

$$= 3.200\left[\frac{1 + 0{,}12(10 - 4)}{1 + 0{,}12(10 - 9)} - 1\right] = 1.714{,}29$$

En la segunda forma, determinamos el capital equivalente en 9 a (3.200,4), siendo el precio financiero total la diferencia aritmética de cuantías. Así, tenemos:

$$(3.200,\ t_1 = 4) \sim (C_2,\ t_2 = 9)$$

$$3.200[1 + 0{,}12(10 - 4)] = C_2[1 + 0{,}12(10 - 9)]$$

$$C_2 = 4.914{,}29 \Rightarrow I = C_2 - C_1 = 1.714{,}29$$

Para el precio financiero unitario o rédito de capitalización, se tiene:

$$r(t_1, t_2; p) = \frac{I}{C_1} = \frac{1.714{,}29}{3.200} = 0{,}535716$$

Y, por último, para el precio financiero medio o tanto de capitalización, tenemos:

$$\rho(t_1, t_2; p) = \frac{r(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}535716}{9 - 4} = 0{,}107143$$

© Ediciones Pirámide

b) Precio acumulado o referido a p

Del precio financiero total, dado por el capital (I, t_2), podemos calcular su proyección en p. Así, **el precio acumulado o referido a *p* es el capital equivalente en *p* del interés pospagable:**

$$I_p = Proy_p(I, t_2) = I \times L(t_2; p) = C_1 \times r(t_1, t_2; p) \times L(t_2; p) =$$
$$= C_1 \times \xi(t_1, t_2; p) = C_1[L(t_1; p) - L(t_2; p)]$$

c) Precio prepagable o anticipado

Para la operación financiera caracterizada por el intercambio de los capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2), hemos calculado anteriormente un precio financiero pospagable o con vencimiento al final del intervalo. Ahora bien, también se puede determinar el precio financiero prepagable o anticipado, abonable al inicio de la operación. En efecto, al ser equivalentes los capitales anteriores y además $C_1 < C_2$, resulta: $I^* = C_2 - C_1$. La diferencia anterior constituye el **interés prepagable** o **anticipado,** o sea, el precio total a pagar al principio del intervalo temporal por disponer durante el mismo de la cuantía del capital final, siendo la cuantía I^* la de un capital (I^*, t_1) con vencimiento al principio del intervalo.

A partir de la expresión $C_1 = C_2 \times u^*(t_1, t_2; p)$ deducimos la ecuación correspondiente al interés anticipado: $I^* = C_2 - C_2 \times u^*(t_1, t_2; p) = C_2 [1 - u^*(t_1, t_2; p)] =$ $= C_2 \times r^*(t_1, t_2; p)$.

Al dividir el interés total anticipado entre la cuantía del capital final obtenemos el **precio financiero unitario prepagable o anticipado:** $\frac{I^*}{C_2} = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = r^*(t_1, t_2; p)$.

Por tanto, el rédito de contracapitalización o de capitalización anticipada es el precio financiero unitario anticipado, e indica el interés prepagable por unidad de capital final, es decir, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital a devolver al final del intervalo.

Si ahora dividimos el precio financiero unitario prepagable entre la amplitud del intervalo temporal, obtenemos la expresión correspondiente al **precio financiero medio prepagable o anticipado:** $\frac{I^*}{C_2(t_2 - t_1)} = \frac{C_2 - C_1}{C_2(t_2 - t_1)} = \frac{r^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \rho^*(t_1, t_2; p)$.

Tenemos, pues, que el tanto anticipado de capitalización es el precio financiero medio prepagable e indica el interés anticipado por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo. En la práctica se le llama **tipo de interés anticipado.** Por ejemplo, decir que en una operación financiera el interés anticipado es de 8 céntimos trimestrales, significa que el tipo de interés con vencimiento al inicio de cada trimestre y por cada unidad

© Ediciones Pirámide

de capital final es de 0,08. Normalmente, en la práctica, el tipo de interés viene expresado en porcentaje. Así, en el caso anterior hablaríamos del 8% trimestral anticipado. Si con ese tanto pedimos un préstamo de 100 € por un trimestre, los intereses son de 8 €, que abonamos inmediatamente, recibiendo en consecuencia 100 − 8 = 92, para devolver al final del trimestre 100 €, por lo que la operación neta o líquida queda:

$$\text{Prestación: } \{(100 - 8,\ t_1)\}$$

$$\text{Contraprestación: } \{(100,\ t_1 + 1/4)\}$$

EJERCICIO 3.9

Determinar el interés anticipado, el precio financiero unitario anticipado y el precio financiero medio prepagable, correspondiente al intervalo temporal (5,9), del capital (800,9), siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}08(p - t)$, $p = 12$.

Resolución

Podemos determinar el precio financiero total prepagable de dos formas. Para la primera determinamos el factor de contracapitalización correspondiente al intervalo temporal considerado y sustituimos en la ecuación correspondiente:

$$I^* = C_2[1 - u^*(t_1, t_2; p)] = 800\left[1 - \frac{L(t_2; p)}{L(t_1; p)}\right] = 800\left[1 - \frac{1 + 0{,}08(12 - 9)}{1 + 0{,}08(12 - 5)}\right] = 164{,}10$$

Para la segunda forma calculamos el capital equivalente en 5 al capital de cuantía 800 con vencimiento en 9, con lo que el precio financiero total anticipado es la diferencia aritmética entre las cuantías de tales capitales:

$$(C_1, 5) \sim (800,\ t_2 = 9)$$

$$C_1[1 + 0{,}08(12 - 5)] = 800[1 + 0{,}08(12 - 9)]$$

$$C_1 = 635{,}90 \Rightarrow I^* = 800 - 635{,}90 = 164{,}10$$

En cuanto al rédito de contracapitalización o precio financiero unitario anticipado, tenemos:

$$r^*(t_1, t_2; p) = \frac{I^*}{C_2} = \frac{164{,}10}{800} = 0{,}205125$$

© Ediciones Pirámide

Y finalmente, el precio financiero medio anticipado o tanto de capitalización prepagable, es:

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{r^*(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}205125}{9 - 5} = 0{,}051281$$

B) Operación valorada con una ley de descuento

Para una operación financiera valorada con una ley de descuento y caracterizada por el intercambio de los capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2), hemos denominado precio financiero total o descuento al capital $D = C_2 - C_1$. Como es $C_1 < C_2$, podemos considerar que el descuento es un precio que se abona al **inicio** de la operación: (D, t_1).

De la expresión del descuento total se deduce: $C_1 = C_2 - D$, por lo que podemos decir que el descuento constituye el precio prepagable a abonar al principio del intervalo temporal por disponer durante el mismo de la cuantía del capital final, siendo la cuantía D la correspondiente a un capital con vencimiento al principio del intervalo (t_1, t_2).

Teniendo en cuenta que $C_1 = C_2 \times v(t_1, t_2; p)$, se deduce: $D = C_2 - C_2 \times v(t_1, t_2; p)$. De donde se llega a la expresión del precio financiero total o descuento: $D = C_2[1 - v(t_1, t_2; p)] = C_2 \times d(t_1, t_2; p)$.

Al dividir el descuento total entre la cuantía del **capital final** obtenemos el **precio financiero unitario de descuento:** $\frac{D}{C_2} = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = d(t_1, t_2; p)$. En consecuencia, el rédito de descuento es un precio financiero unitario e indica el descuento por unidad de capital final, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final.

Si dividimos el precio financiero unitario entre la amplitud del intervalo temporal, obtenemos la expresión correspondiente al **precio financiero medio de descuento:** $\frac{D}{C_2(t_2 - t_1)} = \frac{C_2 - C_1}{C_2(t_2 - t_1)} = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \delta(t_1, t_2; p)$. En consecuencia, el tanto de descuento es un precio financiero medio e indica el descuento por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, o sea, la diferencia de cuantías de dos capitales equivalentes por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo.

Vemos, pues, que el precio financiero medio de descuento, tanto o tipo de descuento, representa la disminución que se genera por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, es decir, es el **precio a pagar al inicio del período temporal unitario por disponer de la unidad de capital durante la unidad de tiempo.** En la práctica se le llama **tipo de descuento.** Por ejemplo, decir que en una operación financiera el tipo de descuento es de 4 céntimos semestrales, significa que el descuento de la unidad de capital final en un semestre es 0,04. Normalmente, en

© Ediciones Pirámide

la práctica, el tipo de descuento viene expresado en porcentaje. Así, en el caso anterior diríamos el 4% semestral, por lo que el descuento de 100 € con vencimiento dentro de un semestre es de 4 €, con vencimiento al principio del citado semestre.

EJERCICIO 3.10

Calcular el descuento total, el precio financiero unitario de descuento y el precio financiero medio de descuento, en el intervalo temporal (7,15), del capital (1.500,15), siendo la ley de valoración $A(t; p) = 1 - 0{,}04(t - p)$, $p = 2$.

Resolución

Una forma de resolución es calcular el capital inicial equivalente al dado, siendo el descuento la diferencia aritmética de cuantías. De esta forma, se tiene:

$$(C_1, t_1 = 7) \sim (1.500, t_2 = 15)$$

$$C_1[1 - 0{,}04(7 - 2)] = 1.500[1 - 0{,}04(15 - 2)] \Rightarrow C_1 = 900 \Rightarrow D = C_2 - C_1 = 600$$

El precio financiero unitario de descuento se obtiene al calcular:

$$d(t_1, t_2; p) = \frac{D}{C_2} = \frac{600}{1.500} = 0{,}40$$

El precio financiero medio de descuento o tanto de descuento se deduce de:

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}4}{8} = 0{,}05$$

3.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Los capitales (25.000,7) y (31.338,13) son equivalentes de acuerdo con la ley $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 20$. Determinar: *a*) factor de capitalización correspondiente a dicha ley para el intervalo (7,13), y *b*) tanto de capitalización del intervalo temporal de extremos 9 y 15.

Resolución

Para calcular los valores pedidos, hemos de determinar antes el valor de k. Para ello, de la ecuación de equivalencia entre los capitales dados, se deduce:

© Ediciones Pirámide

$$25.000[1 + k(20 - 7)] = 31.338[1 + k(20 - 13)] \Rightarrow k = 0{,}06$$

a) Al sustituir en la expresión del factor de capitalización tenemos:

$$u(t_1 = 7, t_2 = 13; p) = \frac{C_2}{C_1} = \frac{L(t_1; p)}{L(t_2; p)} = \frac{1 + 0{,}06(20 - 7)}{1 + 0{,}06(20 - 13)} = 1{,}2535$$

b) Para el tanto, se tiene:

$$\rho(t_1 = 9, t_2 = 15; p = 20) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_2; p)} =$$

$$= \frac{[1 + 0{,}06(20 - 9)] - [1 + 0{,}06(20 - 15)]}{(15 - 9)[1 + 0{,}06(20 - 15)]} = 0{,}046154$$

2. Los capitales financieros (15.000,3) y (16.000,4) son equivalentes de acuerdo con la ley financiera $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 9$. El rédito de contracapitalización X asociado al intervalo (4,6), vale: *a*) $0{,}130 < X < 0{,}135$; *b*) $0{,}150 < X < 0{,}156$; *c*) $X = 2$; *d*) $X = 0{,}866$.

Resolución

En la ecuación de equivalencia entre los capitales dados se verifica: $15.000[1 + k(9 - 3)] = 16.000[1 + k(9 - 4)] \Rightarrow k = 0{,}10$. Y teniendo en cuenta las siguientes expresiones:

$$r^*(t_1 = 4, t_2 = 6; p = 9) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{L(t_1; p)} =$$

$$= \frac{1 + 0{,}10(9 - 4)] - [1 + 0{,}10(9 - 6)]}{1 + 0{,}10(9 - 4)]} = \frac{0{,}2}{1{,}50} = 0{,}1333$$

En consecuencia, la solución correcta es la alternativa *a*.

3. Determinar el valor del punto p en la ley financiera $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, sabiendo que el tanto anticipado de capitalización correspondiente al intervalo temporal de extremos 3 y 5, vale $\frac{1}{19}$ cuando $k = 0{,}10$.

Resolución

Sustituimos en la ecuación del tanto anticipado de capitalización:

© Ediciones Pirámide

$$\rho^*(t_1, t_2; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_1; p)}$$

$$\frac{1}{19} = \frac{[1 + k(p - 3)] - [1 + k(p - 5)]}{(5 - 3)[1 + k(p - 3)]}$$

Y al hacer $k = 0{,}10$, se llega a $p = 12$.

4. Para la ley financiera del ejercicio precedente, calcular el tanto de capitalización correspondiente al intervalo temporal de extremos 5 y 7.

Resolución

$$\rho(t_1 = 5, t_2 = 7; p) = \frac{L(t_1; p) - L(t_2; p)}{(t_2 - t_1)L(t_2; p)} =$$

$$= \frac{[1 + 0{,}10(12 - 5)] - [1 + 0{,}10(12 - 7)]}{(7 - 5)[1 + 0{,}10(12 - 7)]} = 0{,}0667$$

5. Dada la ley financiera $A(t; p) = 1 - 0{,}09(t - p)$, $p = 1$, determinar el factor, el rédito y el tanto de descuento asociado al intervalo temporal $t_1 = 2$, $t_2 = 9$.

Resolución

De acuerdo con las expresiones deducidas, se verifica:

$$v(t_1 = 2, t_2 = 9; p = 1) = \frac{A(t_2; p)}{A(t_1; p)} = \frac{1 - 0{,}09(9 - 1)}{1 - 0{,}09(2 - 1)} = 0{,}3077$$

$$d(t_1, t_2; p) = 1 - v(t_1, t_2; p) = 1 - 0{,}3077 = 0{,}6923$$

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}6923}{9 - 2} = 0{,}0989$$

6. Determinar el precio financiero unitario y el precio financiero medio, asociados al intervalo temporal (6,10), del capital (3.200,6), sabiendo que el precio financiero total pospagable asciende a 1.800.

Resolución

De acuerdo con el concepto de interés, se verifica:

$$I = C_2 - C_1 = 1.800 = C_2 - 3.200 \Rightarrow C_2 = 5.000$$

© Ediciones Pirámide

Para el rédito y el tanto, se tiene:

$$r(t_1 = 6, t_2 = 10; p) = \frac{C_2 - C_1}{C_1} = \frac{5.000 - 3.200}{3.200} = 0{,}5625$$

$$\rho(t_1 = 6, t_2 = 10; p) = \frac{0{,}5625}{10 - 6} = 0{,}140625$$

7. Para el intervalo temporal (5,11) y el capital financiero (1.000,11), el interés anticipado asciende a 350. Determinar el precio financiero unitario anticipado y el precio financiero medio prepagable correspondientes al citado intervalo temporal.

Resolución

El precio financiero total anticipado verifica: $I^* = C_2 - C_1 = 350 \Rightarrow C_1 = 650$. Para las otras magnitudes se tiene:

$$r^*(t_1 = 5, t_2 = 11; p) = \frac{C_2 - C_1}{C_2} = \frac{1.000 - 650}{1.000} = 0{,}35$$

$$\rho^*(t_1 = 5, t_2 = 11; p) = \frac{r^*(t_1 = 5, t_2 = 11; p)}{t_2 - t_1} = \frac{0{,}35}{11 - 5} = 0{,}058\hat{3}$$

8. Calcular el descuento total, el precio financiero unitario de descuento y el precio financiero medio de descuento, en el intervalo temporal (4,10), del capital (990.000,10), siendo la ley de valoración $A(t; p) = 1 - 0{,}01(t - p)$, $p = 3$.

Resolución

De la ecuación de equivalencia entre capitales se llega a:

$$C_1[1 + 0{,}01(4 - 3)] = 990.000[1 - 0{,}01(10 - 3)] \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1 = 930.000; \; D = 990.000 - 930.000 = 60.000$$

$$d(t_1 = 4, t_2 = 10; p) = \frac{D}{C_2} = 0{,}0606$$

$$\delta(t_1, t_2; p) = \frac{d(t_1, t_2; p)}{t_2 - t_1} = 0{,}0101$$

9. Determinar la ley financiera de capitalización cuyo tanto instantáneo es $\rho(t; p) = 0{,}05t^4 + t$.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Calculamos $\int_t^p \rho(x; p) \times dx$ y después sustituimos en la ecuación precedente:

$$\int_t^p \rho(x; p) \times dx = \int_t^p (0{,}05x^4 + x) \times dx = [0{,}01x^5 + 0{,}5x^2]_t^p =$$

$$= 0{,}01(p^5 - t^5) + 0{,}5(p^2 - t^5) \Rightarrow L(t; p) = e^{0{,}01(p^5 - t^5) + 0{,}5(p^2 - t^2)}$$

3.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Los capitales financieros (10.000,2) y (12.000,4) son equivalentes, de acuerdo con la ley financiera $L(t; p) = 1 + k(p - t)$, $p = 10$. El rédito de contracapitalización X asociado al intervalo temporal (3,5), vale: *a*) $0{,}211 < X < 0{,}233$; *b*) $0{,}085 < X < 0{,}095$; *c*) $X = 0{,}5$; *d*) $0{,}17 < X < 0{,}19$.

2. Los capitales financieros (10.000,3) y (15.000,7) son equivalentes, de acuerdo con la ley financiera $L(t; p) = k + h(p - t)$, $p = 10$. El rédito de capitalización acumulado X asociado al intervalo temporal (2,7), vale: *a*) $0{,}40 < X < 0{,}60$; *b*) $0{,}095 < X < 1{,}25$; *c*) $0{,}70 < X < 0{,}90$; *d*) ninguna de las anteriores.

3. Para la ley financiera $L(t; p) = a + b(p - t)$, $p = 15$, se sabe que la suma financiera de los capitales (50.000,2) y (75.000,6), calculada en el punto 10, es 195.000. Determinar el rédito de capitalización asociado al intervalo temporal de extremos 6 y 8.

4. El interés pospagable de un capital de 5.000 u.m. en el intervalo (2,5) vale 1.800 u.m. Determinar el factor de capitalización vinculado a dicho intervalo temporal.

5. Dada la ley de capitalización $L(t; p) = a + b(p - t)$, $p = 10$, se conoce que el rédito acumulado correspondiente al intervalo temporal de extremos 3 y 6 vale 0,045. Determinar el tanto de capitalización correspondiente al intervalo (4,6).

© Ediciones Pirámide

4 Sistemas financieros clásicos de capitalización y de descuento

OBJETIVOS

- Entender y aplicar el concepto de capitalización simple, de capitalización compuesta y de descuento simple comercial.
- Determinar el valor de las diversas magnitudes derivadas.
- Calcular tantos equivalentes en los tres sistemas financieros.
- Conocer y aplicar el concepto de capitalización con intereses anticipados.

SUMARIO

4.1. Introducción.
4.2. Sistema financiero de capitalización simple.
4.3. Sistema financiero de capitalización compuesta.
4.4. Sistema financiero de descuento simple comercial.
4.5. Ejercicios y problemas resueltos.
4.6. Ejercicios y problemas propuestos.

4.1. INTRODUCCIÓN

La ley financiera, tal y como se ha señalado en la primera lección, es una expresión matemática tal que, fijado un punto p de aplicación de dicha ley, permite obtener para cada capital (C, t) el valor V de su sustituto o proyección financiera en p:

$$V = Proy_p(C, t) = C \times F(t; p)$$

Si en cada expresión analítica de la ley financiera de valoración hacemos que el punto de aplicación de la misma varíe de posición, obtenemos una **familia de leyes financieras** expresadas todas por el mismo modelo. Tal familia de leyes constituye un **sistema financiero.** En general, dada una ley financiera podemos definir un sistema financiero como el conjunto de leyes que se obtiene al hacer p variable. Si la ley dada es de capitalización se obtendrá un sistema financiero de capitalización, y si, por el contrario, la ley es de descuento, se tendrá un sistema financiero de descuento.

Toda operación financiera constituye un intercambio de capitales financieros entre dos sujetos económicos, los cuales llevarán a cabo dicho intercambio fijando el criterio financiero mediante el cual se valoran tales capitales. Dichos sujetos pueden establecer cualquier criterio financiero, siempre y cuando cumpla las propiedades analizadas. Ahora bien, de entre los infinitos criterios de valoración financiera que se pueden establecer, las **Leyes financieras clásicas** son las utilizadas en la práctica económica para valorar capitales financieros constitutivos de las diversas operaciones llevadas a cabo por los distintos sujetos económicos.

Existen diversas formas de definir cada uno de los sistemas clásicos. Nosotros los vamos a sustentar en las hipótesis o condiciones que pactan los sujetos económicos para la determinación del precio financiero asociado al intercambio de un

© Ediciones Pirámide

capital (C, t) y su sustituto en p, (V, p). De esta forma, cada vez que se pacta una operación financiera, no es preciso establecer las hipótesis económico-financieras del criterio de valoración a utilizar en tal operación, sino que directamente se señala el criterio a aplicar, asumiendo, en consecuencia, todas las condiciones que el mismo conlleva.

4.2. SISTEMA FINANCIERO DE CAPITALIZACIÓN SIMPLE

4.2.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera

Valorar capitales financieros con el sistema de capitalización simple, ley de capitalización simple o interés simple, implica que cuando un sujeto cede un capital (C, t) para recibir como equivalente o sustituto en $p > t$ el capital (V, p), acepta lo siguiente:

a) El precio financiero total I es proporcional a la cuantía inicial C, al número de períodos $p - t$ y al tipo de interés i.

b) El precio financiero total se abona en p.

De acuerdo con las hipótesis establecidas, tenemos que $I = C(p - t)i$, por lo que se verifica $V = C + C \times i(p - t) = C[1 + i(p - t)]$, siendo la ley financiera unitaria en el sistema de capitalización simple[1]:

$$L(t; p) = 1 + i(p - t) \text{ con } t < p$$

En relación a esta ecuación, se debe cumplir que la amplitud del intervalo temporal $(p - t)$ y el tipo de interés i han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Si dos sujetos aceptan intercambiar los capitales financieros (C_0, t_0) y (C_n, t_n) en base al sistema de capitalización simple, llevarán a cabo dicho intercambio si ambos capitales son equivalentes, debiéndose verificar:

$$(C_0, t_0) \sim (C_n, t_n) \Rightarrow C_0 \times L(t_0; p) = C_n \times L(t_n; p)$$

$$C_0[1 + i(p - t_0)] = C_n[1 + i(p - t_n)]$$

$$C_n = C_0 \frac{1 + i(p - t_0)}{1 + i(p - t_n)}$$

En la utilización práctica de este sistema de capitalización se toma como punto p de aplicación de la ley el vencimiento del segundo capital: $p = t_n$. En tal caso,

[1] Recordemos que $V = C \times L(t; p)$.

© Ediciones Pirámide

haciendo $t_n - t_0 = n$, obtenemos la ecuación de equivalencia financiera en el sistema de capitalización simple:

$$C_n = C_0(1 + n \times i)$$

Por tanto, el importe de los intereses totales, que tienen vencimiento al final de la operación, viene dado por la siguiente expresión:

$$I = C_n - C_0 = C_0 \times n \times i$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.
n: Número de períodos de tiempo.
i: Tipo de interés unitario.
I: Intereses totales.

Hay que destacar que, en este sistema de capitalización, el precio financiero total o intereses se calculan sobre el capital inicial y que los intereses no devengan nuevos intereses. En consecuencia, el sistema financiero de capitalización simple se utiliza habitualmente en operaciones financieras a corto plazo.

EJERCICIO 4.1

Una persona presta 6.000 euros para obtener su montante al cabo de 9 meses en capitalización simple al 6% anual. Calcular el precio financiero total y el montante.

Resolución

El montante o capital final se obtiene aplicando la ecuación de equivalencia financiera, teniendo en cuenta que 9 meses equivale a $\frac{9}{12}$ años, por lo que: $C_n =$

$= 6.000 \left(1 + \frac{9}{12} \times 0{,}06\right) = 6.270$ euros.

El importe de los intereses o precio financiero total es $I = 6.270 - 6.000 =$ $= 270$ euros.

EJERCICIO 4.2

Una persona presta 18.000 euros durante 120 días al 4% anual. Calcular los intereses generados o precio financiero total, considerando el año comercial.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Para calcular los intereses generados en esta imposición de capitalización simple tenemos que pasar los días a años, ya que el tipo de interés dado es de periodicidad anual. Si consideramos el año comercial, 120 días equivalen a $\frac{120}{360}$ años; si por el contrario consideramos el año civil, los 120 días equivalen a $\frac{120}{365}$años.

En consecuencia, los intereses comerciales son: $I = 18.000\frac{120}{360} \times 0{,}04 = 240$ euros.

EJERCICIO 4.3

Un individuo deposita 40.000 euros en una entidad financiera que le ofrece, en capitalización simple, el 5% anual durante los primeros 6 meses, y a continuación el 7% anual durante los 6 meses siguientes. Hallar el importe de los intereses totales.

Resolución

En el sistema de capitalización simple los intereses se calculan siempre sobre el capital inicial. Por tanto, tenemos:

Intereses correspondientes al primer semestre: $I_1 = 40.000 \times \frac{6}{12} \times 0{,}05 = 1.000$ euros.

Intereses correspondientes al segundo semestre: $I_2 = 40.000 \times \frac{6}{12} \times 0{,}07 = 1.400$ euros.

Intereses totales: $I = 1.000 + 1.400 = 2.400$ euros.

4.2.2. Magnitudes derivadas

A continuación se van a exponer las expresiones que nos permiten obtener los factores, réditos y tantos correspondientes al sistema financiero de capitalización simple. Para ello, se toma (t_0, t_n) como intervalo temporal (siendo la amplitud del intervalo temporal $t_n - t_0 = n$) y se utiliza como punto de aplicación el vencimiento del segundo capital: $p = t_n$.

A) Factor de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

© Ediciones Pirámide

$$u(t_0, t_n; p) = \frac{C_n}{C_0} = \frac{C_0(1 + n \times i)}{C_0} = 1 + n \times i$$

$$u^*(t_0, t_n; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{C_0}{C_0(1 + n \times i)} = \frac{1}{1 + n \times i}$$

B) Rédito de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$r(t_0, t_n; p) = u(t_0, t_n; p) - 1 = (1 + n \times i) - 1 = n \times i$$

$$r^*(t_0, t_n; p) = 1 - u^*(t_0, t_n; p) = 1 - \frac{1}{(1 + n \times i)} = \frac{n \times i}{1 + n \times i}$$

C) Tanto de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$\rho(t_0, t_n; p) = \frac{r(t_0, t_n; p)}{n} = i$$

$$\rho^*(t_0, t_n; p) = \frac{r^*(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{i}{1 + n \times i} = i^*$$

Por consiguiente, el tanto de capitalización i representa el precio financiero total por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, denominándose **tipo de interés pospagable.** En cambio, el tanto de contracapitalización representa el precio financiero anticipado o prepagable por unidad de capital final y promedio por unidad de tiempo, denominándose **tipo de interés anticipado,** que simbolizamos por i^*.

Si de la expresión del tipo de interés anticipado i^* despejamos el tipo de interés vencido i, obtenemos:

$$i = \frac{i^*}{1 - n \times i^*}$$

Tenemos, pues, que en la capitalización simple el tipo de interés vencido equivalente al tipo de interés anticipado, o viceversa, depende del número de períodos n.

Ejercicio 4.4

Se impone un capital de 1.000 € durante 3 meses en capitalización simple, obteniéndose un capital final de 1.015 €. Calcular el factor, el rédito y el tanto de capitalización asociado a dicho intervalo temporal.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Teniendo en cuenta las expresiones indicadas, se obtiene:

$$\text{Factor de capitalización: } u(0,3;\, p) = \frac{1.015}{1.000} = 1,015$$

$$\text{Rédito de capitalización: } r(0,3;\, p) = 1,015 - 1 = 0,015$$

$$\text{Tanto de capitalización: } \rho(0,3;\, p) = \frac{0,015}{3} = 0,005 = 0,5\%$$

El rédito de capitalización $r(0,3;\, p) = 0,015$ nos indica el precio financiero unitario pospagable o interés pospagable de una unidad monetaria impuesta durante 3 meses. El tanto de capitalización $\rho(0,3;\, p) = 0,005$ señala el precio financiero medio o interés pospagable por unidad de capital inicial y promedio por unidad de tiempo, para un intervalo temporal de 3 meses.

EJERCICIO 4.5

Se impone un capital durante 4 años en capitalización simple a un tipo de interés del 1 % anual. Calcular el factor, el rédito y el tanto de contracapitalización asociado a dicho intervalo temporal.

Resolución

La cuantía de las distintas magnitudes se obtiene considerando que el tipo de interés anual es $i = 0,01$ y que la amplitud del intervalo temporal es $n = 4$.

$$\text{Factor de contracapitalización: } u^*(0,4;\, p) = \frac{1}{1 + 4 \times 0,01} = \frac{1}{1,04} = 0,961538461$$

$$\text{Rédito de contracapitalización: } r^*(0,4;\, p) = 1 - 0,961538461 = 0,038461538$$

$$\text{Tanto de contracapitalización: } \rho^*(0,4;\, p) = \frac{0,038461538}{4} = 0,009615384$$

4.2.3. Tantos equivalentes

Dos tantos i e $i^{(m)}$, referidos a distintas unidades de tiempo, son equivalentes cuando para un mismo capital inicial, y durante el mismo tiempo, producen idéntico montante. Por ejemplo, el montante de un determinado capital transcurridos de 7 años al 6 % anual, toma el mismo valor que si lo calculamos al cabo de 14 semestres al tipo semestral equivalente.

© Ediciones Pirámide

Así, para un capital inicial C_0 que se imponga durante n períodos al tipo de interés i, estando referidos n e i a la misma unidad de tiempo, el montante obtenido es $C_n = C_0 (1 + n \times i)$. Si, por el contrario, a dicho capital C_0 impuesto durante el mismo intervalo temporal, se le aplica un tipo de interés $i^{(m)}$ referido a otra unidad de tiempo de amplitud $1/m$, el montante obtenido es $C_n = C_0 (1 + m \times \times n \times i^{(m)})$. En este sentido, es preciso señalar que el producto $m \times n$ está expresado en la misma unidad de tiempo a la que se refiere el tipo de interés $i^{(m)}$.

Si ambos tipos de interés i e $i^{(m)}$ son equivalentes, las cuantías de los montantes obtenidos con ambos tipos deben ser iguales. En consecuencia:

$$C_0 (1 + n \times i) = C_0 (1 + m \times n \times i^{(m)}) \Rightarrow i = m \times i^{(m)}$$

El tipo de interés i se refiere a períodos unitarios de tiempo, e $i^{(m)}$ a subperíodos de amplitud $\frac{1}{m}$, siendo:

i: Tipo de interés unitario o tanto efectivo del período.
$i^{(m)}$: Tanto o tipo efectivo del subperíodo.
m: Número de subperíodos existentes en cada unidad de tiempo a la que va referido i.

Es preciso destacar que la expresión anterior es válida exclusivamente en el sistema de capitalización simple. Además, si el tipo i es anual y m toma valores iguales a 2, 3, 4, 6 y 12, tenemos períodos semestrales, cuatrimestrales, trimestrales, bimestrales y mensuales, respectivamente. Por ejemplo, el 3% trimestral es equivalente al 12% anual: $i = 0{,}03 \times 4 = 0{,}12$, ya que en un año hay 4 trimestres. Por otro lado, el 8% anual es equivalente al 4% semestral: $i^{(m)} = \frac{0{,}08}{2}$, pues en un año hay 2 semestres. Y, por último, el 6% semestral es equivalente al 1% mensual: $i^{(m)} = \frac{0{,}06}{6} = 0{,}01$, ya que en un semestre hay 6 meses.

EJERCICIO 4.6

Calcular el interés simple de un capital de 750 € prestado durante 5 meses al 6% anual.

Resolución

En primer lugar vamos a calcular el tipo de interés mensual equivalente al 6% anual: $i^{(m)} = \frac{0{,}06}{12} = 0{,}005$ mensual. A continuación sustituimos en la expresión

© Ediciones Pirámide

que nos permite determinar el importe de los intereses totales: $I = C_0 \times n \times i = 750 \times 5 \times 0{,}005 = 18{,}75$ €.

4.2.4. Capitalización con intereses anticipados

Tal y como se ha expuesto, si se impone un capital C_0 en capitalización simple durante el intervalo temporal (t_0, t_n), al final de dicho intervalo se pagan los intereses correspondientes o precio financiero total. No obstante, es posible que la operación se pacte con intereses anticipados o prepagables, de manera que los intereses se desembolsan al principio de dicho intervalo temporal.

La ecuación de equivalencia financiera en la capitalización simple es $C_n = C_0 (1 + n \times i)$. Si sustituimos el tipo de interés por la expresión $i = \dfrac{i^*}{1 - n \times i^*}$, que relaciona el tipo de interés pospagable con el tipo de interés anticipado o prepagable, obtenemos:

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{n \times i^*}{1 - n \times i^*}\right) = C_0 \left(\frac{1 - n \times i^* + n \times i^*}{1 - n \times i^*}\right) = \frac{C_0}{1 - n \times i^*}$$

Si despejamos el capital inicial C_0, se llega a la ecuación de equivalencia financiera de capitalización simple con intereses anticipados:

$$C_0 = C_n (1 - n \times i^*)$$

El importe de los intereses totales anticipados o prepagables es:

$$I^* = C_n - C_0 = C_n \times n \times i^*$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.
n: Número de períodos de tiempo.
i^*: Tipo de interés anticipado unitario.
I^*: Intereses totales anticipados.

De manera que los intereses anticipados o prepagables en el sistema de capitalización simple se calculan sobre el capital final, y no sobre el capital inicial.

Ejercicio 4.7

Una persona presta 10.000 euros durante 6 meses en capitalización simple al tipo de interés anticipado del 5% anual. Calcular la cuantía que tiene que desembolsar inicialmente y el importe de los intereses anticipados.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El capital inicial o cuantía que desembolsa inicialmente se obtiene al aplicar la ecuación de equivalencia financiera con intereses anticipados: $C_0 = 10.000\left(1 - \frac{6}{12} \times 0{,}05\right) = 9.750$ €. Transcurridos los 6 meses recibe el capital final $C_n = 10.000$ €, por lo que el importe de los intereses anticipados o precio financiero total anticipado es $I^* = 10.000 - 9.750 = 250$ €. También se pueden determinar los intereses prepagables con la expresión: $I^* = C_n \times n \times i^* = 10.000 \times \frac{6}{12} \times 0{,}05 = 250$ €.

EJERCICIO 4.8

Se impone un capital en capitalización simple durante 3 años al 6% anual anticipado. Calcular el tipo de interés pospagable equivalente a dicho tipo de interés prepagable.

Resolución

La ecuación que relaciona el tipo de interés vencido o pospagable i con el tipo de interés prepagable o anticipado i^* es la siguiente: $i = \frac{i^*}{1 - n \times i^*}$. Si sustituimos en la misma, tenemos:

$$i = \frac{0{,}06}{1 - 3 \times 0{,}06} = 0{,}073170731 \text{ anual}$$

4.3. SISTEMA FINANCIERO DE CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

4.3.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera

Valorar capitales financieros con el sistema de capitalización compuesta, ley de capitalización compuesta o interés compuesto, implica que cuando un sujeto cede un capital (C, t) para recibir como equivalente o sustituto en $p > t$ el capital (V, p), acepta lo siguiente:

a) Al final de cada uno de los $z = p - t$ períodos unitarios se calcula el precio financiero parcial o intereses periódicos, los cuales son proporcionales al

© Ediciones Pirámide

tipo de interés correspondiente a dicho período y a la cuantía acumulada (capital más intereses) al inicio del respectivo período.

b) El precio financiero total I se abona en p.

Por tanto, la hipótesis básica de este sistema es el proceso acumulativo o capitalización de intereses al final de cada período, con el fin de producir nuevos intereses en el período siguiente.

De acuerdo con las hipótesis expuestas, al ser $p = t + z$, y siendo i el tipo de interés unitario para cada período, tenemos:

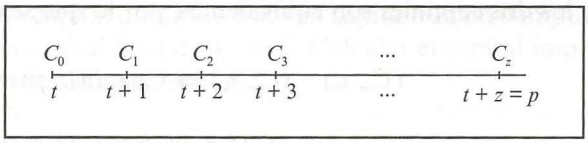


Figura 4.1.

Siendo $I_1 = C_0 \times i$ los intereses correspondientes al período 1, y C_1 la cuantía acumulada al final de dicho período 1 o principio del período 2, se verifica para el primer período: $C_1 = C_0 + I_1 = C_0(1 + i)$ y para el segundo período $C_2 = C_1 + I_2 = C_1 + C_1 \times i = C_1(1 + i) = C_0(1 + i)^2$.

Al repetir este proceso de obtener en cada uno de los períodos los intereses correspondientes al mismo, calculados sobre el capital al inicio del citado período, y acumularlos a dicho capital, se tiene:

$$I_s = C_{s-1} \times i;\ C_s = C_{s-1} + I_s = C_{s-1}(1 + i) = C_0(1 + i)^s$$

siendo:

I_s: Intereses del período s.
C_s: Capital acumulado al final del período s o principio del período $s + 1$.
i: Tipo unitario de interés.

Finalmente, se llega a:

$$C_z = C_0(1 + i)^z = C_0(1 + i)^{p-t} = V$$

De manera que la ley financiera unitaria en el sistema de capitalización compuesta es[2]:

$$L(t; p) = (1 + i)^{p-t} \text{ con } t < p$$

[2] Recordemos que $V = C \times L(t; p)$.

© Ediciones Pirámide

Lógicamente, la amplitud del intervalo temporal $(p - t)$ y el tipo de interés i han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Según el proceso descrito anteriormente, la capitalización compuesta supone calcular los intereses al final de cada uno de los períodos y posteriormente acumular dichos intereses al capital impuesto al inicio del respectivo período, de manera que la suma de capital inicial e intereses produce nuevamente intereses en el período siguiente; y así sucesivamente, de manera que los intereses totales se hacen efectivos íntegramente al final de la operación.

Si dos sujetos aceptan intercambiar los capitales financieros (C_0, t_0) y (C_n, t_n) en base al sistema de capitalización compuesta, llevarán a cabo dicho intercambio si los dos capitales son equivalentes, por lo que se debe verificar:

$$(C_0, t_0) \sim (C_n, t_n) \Rightarrow C_0 \times L(t_0; p) = C_n \times L(t_n; p)$$

$$C_0(1 + i)^{p - t_0} = C_n(1 + i)^{p - t_n}$$

$$C_n = C_0(1 + i)^{t_n - t_0}$$

De la ecuación precedente se deduce una importante propiedad de este sistema financiero de valoración: **la equivalencia de capitales es independiente del punto *p***. Por ello, en la aplicación de este sistema no es preciso realizar hipótesis alguna sobre el punto p. Haciendo $t_n - t_0 = n$, se obtiene la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta:

$$C_n = C_0(1 + i)^n$$

O bien: $C_0 = C_n(1 + i)^{-n}$.

El importe de los intereses totales se obtiene mediante la expresión:

$$I = C_n - C_0 = C_0[(1 + i)^n - 1]$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.
n: Número de períodos de tiempo.
i: Tipo de interés unitario.
I: Intereses totales.

EJERCICIO 4.9

Se presta un capital de 12.000 euros durante 5 años en capitalización compuesta al 4% anual. Calcular el montante y los intereses totales.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El montante se calcula mediante la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta: $C_n = 12.000(1 + 0{,}04)^5 = 14.599{,}83$ €. El importe de los intereses totales se obtiene como: $I = C_n - C_0 = 14.599{,}83 - 12.000 = 2.599{,}83$ €. También podemos obtener la cuantía de los intereses totales de la siguiente forma: $I = C_0[(1 + i)^n - 1] = 12.000[(1 + 0{,}04)^5 - 1] = 2.599{,}83$ €.

EJERCICIO 4.10

Se impone un capital durante 8 años en capitalización compuesta al 6% anual, obteniéndose un capital final de 4.144 €. Calcular el capital impuesto inicialmente y el capital equivalente en el año 3.

Resolución

El capital inicial se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera: $4.144 = C_0(1 + 0{,}06)^8 \Rightarrow C_0 = 2.600$ €. El capital equivalente en el año 3 se puede obtener a través del capital inicial o del capital equivalente en el año 8: $C_3 = 2.600(1 + 0{,}06)^3 = 4.144(1 + 0{,}06)^{-5} = 3.096{,}64$ €.

EJERCICIO 4.11

Una persona presta 3.000 euros en capitalización compuesta durante 3 años al 8% anual. Calcular los intereses totales y los intereses periódicos generados en cada uno de los tres años.

Resolución

Para calcular el importe de los intereses totales aplicamos la expresión: $I = C_{n^0} - C_0 = C_0[(1 + i)^n - 1]$, mientras que para obtener los intereses periódicos se aplica cualquiera de las dos expresiones siguientes: $I_s = C_s - C_{s-1} = C_{s-1} \times i$ con $s = 1, 2, 3$.

El importe de los intereses totales al final del tercer año asciende a $I = 3.000\,[(1 + 0{,}08)^3 - 1] = 779{,}14$ €.

El importe de los intereses generados en cada uno de los tres años es:

Año 1: $C_1 = 3.000(1 + 0{,}08) = 3.240$; $I_1 = C_1 - C_0 = 3.240 - 3.000 = 240$ €. También se verifica: $I_1 = C_0 \times i = 3.000 \times 0{,}08 = 240$.

Año 2: $C_2 = 3.000(1 + 0{,}08)^2 = 3.499{,}2$; $I_2 = C_2 - C_1 = 3.499{,}20 - 3.240 = 259{,}20$ €. De otra forma se cumple: $I_2 = C_1 \times i = 3.240 \times 0{,}08 = 259{,}20$.

Año 3: $C_3 = 3.000(1 + 0{,}08)^3 = 3.779{,}14$; $I_3 = C_3 - C_2 = 3.779{,}14 - 3.499{,}2 = 279{,}94$ €. Lógicamente, se cumple: $I_3 = C_2 \times i = 3.499{,}20 \times 0{,}08 = 279{,}94$ €.

© Ediciones Pirámide

Obviamente, $I = I_1 + I_2 + I_3 = 240 + 259{,}20 + 279{,}94 = 779{,}14$ €. Y también se verifica: $I = C_n - C_0 = 3.774{,}14 - 3.000$.

4.3.2. Magnitudes derivadas

En este epígrafe se van a obtener las expresiones que nos permiten calcular los factores, réditos y tantos correspondientes al sistema financiero de capitalización compuesta, tomando (t_0, t_n) como intervalo temporal y teniendo en cuenta que la amplitud del mismo es $t_n - t_0 = n$.

A) Factor de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$u(t_0, t_n; p) = \frac{C_n}{C_0} = \frac{C_0(1+i)^n}{C_0} = (1+i)^n$$

$$u^*(t_0, t_n; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{C_0}{C_0(1+i)^n} = \frac{1}{(1+i)^n} = (1+i)^{-n}$$

B) Rédito de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$r(t_0, t_n; p) = u(t_0, t_n; p) - 1 = (1+i)^n - 1$$

$$r^*(t_0, t_n; p) = 1 - u^*(t_0, t_n; p) = 1 - (1+i)^{-n}$$

C) Tanto de capitalización y de contracapitalización o de capitalización anticipada:

$$\rho(t_0, t_n; p) = \frac{r(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{(1+i)^n - 1}{n}$$

$$\rho^*(t_0, t_n; p) = \frac{r^*(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{1 - (1+i)^{-n}}{n}$$

Si tomamos $n = 1$, es decir, que la amplitud del intervalo temporal sea la unidad, las expresiones del tanto de capitalización y del de contracapitalización son las siguientes:

$$\rho(t_0, t_n; p) = \frac{(1+i)^1 - 1}{1} = i$$

$$\rho^*(t_0, t_n; p) = \frac{1 - (1+i)^{-1}}{1} = i^*$$

© Ediciones Pirámide

Por consiguiente, el tanto de capitalización i representa el precio financiero total por unidad de capital inicial y para intervalos unitarios de tiempo, denominándose **tipo de interés pospagable.** En cambio, el tanto de contracapitalización i^* representa el precio financiero anticipado o prepagable por unidad de capital final y para intervalos unitarios de tiempo, recibiendo el nombre de **tipo de interés anticipado.**

De la expresión del tipo de interés anticipado $i^* = 1 - (1 + i)^{-1}$, se tiene que $(1 + i)(1 - i^*) = 1$, ecuación que permite expresar un tipo de interés en función del otro:

$$i = \frac{i^*}{1 - i^*} \quad ; \quad i^* = \frac{i}{1 + i}$$

EJERCICIO 4.12

Se impone un capital durante 6 años en capitalización compuesta a un tipo de interés del 4% anual. Calcular el rédito y el tanto de capitalización y de contracapitalización asociado a dicho intervalo temporal.

Resolución

Factor de capitalización: $u(0,6;\, p) = (1 + 0,04)^6 = 1,265319018$
Rédito de capitalización: $r(0,6;\, p) = 1,265319018 - 1 = 0,265319018$

Tanto de capitalización: $\rho(0,6;\, p) = \dfrac{0,265319018}{6} = 0,044219836$

Factor de contracapitalización: $u^*(0,6;\, p) = (1 + 0,04)^{-6} = 0,790314525$
Rédito de contracapitalización: $r^*(0,6;\, p) = 1 - 0,790314525 = 0,209685474$

Tanto de contracapitalización: $\rho^*(0,6;\, p) = \dfrac{0,209685474}{6} = 0,034947579$

De acuerdo con los resultados obtenidos, el rédito de capitalización $r(0,6;\, p) = 0,265319018$ nos indica el precio financiero unitario pospagable o interés pospagable de una unidad monetaria impuesta durante 6 años. El tanto de capitalización $\rho(0,6;\, p) = 0,044219836$ nos indica el precio financiero medio o interés promedio anual pospagable para un intervalo temporal de 6 años. En cuanto a las magnitudes de contracapitalización, el rédito de contracapitalización $r^*(0,6;\, p) = 0,209685474$ nos indica el precio financiero unitario anticipado o interés prepagable de una unidad monetaria durante 6 años. El tanto de contracapitalización $\rho^*(0,6;\, p) = 0,034947579$ nos indica el precio financiero medio anticipado o interés promedio anual prepagable para un intervalo temporal de 6 años.

© Ediciones Pirámide

4.3.3. Tantos equivalentes

Dos tantos i e $i^{(m)}$, referidos a distintas unidades de tiempo, son equivalentes cuando para un mismo capital inicial y durante el mismo tiempo producen idéntico montante. Por ejemplo, el montante de cierto capital al cabo de 5 años al 8% anual, toma el mismo valor que si calculamos el montante al final de $5 \times 12 = 60$ meses al tipo mensual equivalente al 8% anual.

Así, para un capital inicial C_0 que se imponga durante n períodos al tipo de interés i, estando referidos n e i a la misma unidad de tiempo, el montante obtenido es $C_n = C_0(1 + i)^n$. En el supuesto de que dicho capital C_0 sea impuesto durante el mismo intervalo temporal, pero aplicándose un tipo de interés $i^{(m)}$ referido a otra unidad de tiempo de amplitud $\frac{1}{m}$, el montante obtenido es $C_n = C_0(1 + i^{(m)})^{n \times m}$, ya que en cada unidad de tiempo a la que están referidos n e i, hay m unidades a las que está referido $i^{(m)}$. Para que ambos tipos de interés i e $i^{(m)}$ sean equivalentes, se debe cumplir que la cuantía de ambos montantes sea la misma:

$$C_n = C_0(1 + i)^n = C_0(1 + i^{(m)})^{m \times n}$$

de donde se obtiene la siguiente relación:

$$(1 + i^{(m)})^m = 1 + i \Rightarrow i^{(m)} = (1 + i)^{1/m} - 1$$

Es preciso destacar que las expresiones anteriores son válidas exclusivamente en el sistema de capitalización compuesta.

El tipo de interés i se refiere a períodos unitarios de tiempo, e $i^{(m)}$ a subperíodos de amplitud $\frac{1}{m}$, por lo que:

i: Tipo de interés unitario o tanto efectivo del período.
$i^{(m)}$: Tanto o tipo efectivo del subperíodo.
m: Número de subperíodos existentes en cada unidad de tiempo a la que va referido i.

Normalmente i va referido al año, por lo que $i^{(m)}$ será de periodicidad inferior al mismo (por ejemplo: semestral, trimestral, mensual, ...) con $m = 2, 4, 12$, respectivamente.

EJERCICIO 4.13

Calcular el tipo de interés semestral equivalente al 5% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

En este caso tenemos que el tipo de interés del período es $i = 0{,}05$ anual y el número de subperíodos es $m = 2$, ya que en un año existen 2 semestres. La incógnita es el tipo de interés del subperíodo $i^{(m)}$ semestral:

$$(1 + i^{(m)})^2 = 1 + 0{,}05 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}05)^{1/2} - 1 = 0{,}02469507 \text{ semestral}$$

EJERCICIO 4.14

Calcular el tipo de interés anual equivalente al 2% cuatrimestral.

Resolución

El tipo de interés del subperíodo es $i^{(m)} = 0{,}02$ cuatrimestral; el tipo de interés del período es i anual y el número de subperíodos es $m = 3$, ya que en un año existen 3 cuatrimestres. El tipo de interés anual i es:

$$(1 + i) = (1 + 0{,}02)^3 \Rightarrow i = (1 + 0{,}02)^3 - 1 = 0{,}061208 \text{ anual}$$

EJERCICIO 4.15

Calcular el tipo de interés cuatrimestral equivalente al 1% mensual.

Resolución

El tipo de interés del subperíodo es el 1% mensual, el tipo de interés del período es el tipo cuatrimestral, siendo el número de subperíodos $m = 4$, ya que en un cuatrimestre hay 4 meses. El tipo de interés cuatrimestral es:

$$(1 + i^{(m)}) = (1 + 0{,}01)^4 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}01)^4 - 1 = 0{,}04060401 \text{ cuatrimestral}$$

Tal y como se ha expuesto, si en la expresión de los tantos equivalentes $1 + i = (1 + i^{(m)})^m$, consideramos el tanto anual i, el tanto $i^{(m)}$ corresponde a períodos de amplitud $\frac{1}{m}$ del año. Al efectuar su proyección aritmética anual, se obtiene un tanto denominado **tanto nominal de frecuencia** m, o tanto anual nominal convertible m veces, que se simboliza por $j_{(m)}$:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{j_{(m)}}{m}$$

© Ediciones Pirámide

En general, la frecuencia m de capitalización nos indica el número de veces que en un período se acumulan los intereses al capital para producir nuevos intereses.

Por ejemplo, para el 3% semestral, el tanto nominal anual de frecuencia semestral es el 6%. Si consideramos como período unitario el trienio, el tanto nominal trienal de frecuencia semestral es el 18%, pues en un trienio existen 6 semestres. No obstante, en la práctica generalmente los tantos nominales son anuales.

El tanto nominal anual puede expresarse de cualquiera de las formas siguientes, según el período al que se refiera:

— Tanto nominal capitalizable (o acumulable o pagadero) semestralmente, trimestralmente, mensualmente, etc.
— Tanto nominal convertible por semestres, trimestres, meses, etc.
— Tanto nominal anual de frecuencia m (si $m = 2$ es de frecuencia semestral, si $m = 3$ es de frecuencia cuatrimestral, etc.).

En general, ante un tipo de interés concreto, es preciso dejar claro si el sistema financiero de valoración es la capitalización simple o la compuesta, y en este último caso, si se trata de un tipo efectivo i, de un tipo del subperíodo $i^{(m)}$ o de un tipo nominal $j_{(m)}$.

EJERCICIO 4.16

Calcular el tipo de interés anual equivalente al 9% anual capitalizable mensualmente.

Resolución

Del tipo nominal anual capitalizable mensualmente se obtiene el tipo de interés mensual equivalente, teniendo en cuenta que $m = 12$, ya que en un año existen 12 meses:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075 \text{ mensual}$$

Una vez calculado el tipo de interés mensual se determina el tipo de interés anual equivalente al 0,0075 mensual. Para ello, consideramos que el tipo de interés del período es i anual, el tipo de interés del subperíodo es el $i^{(m)}$ mensual y que el número de subperíodos es $m = 12$. Dicho tipo de interés anual es:

$$(1 + i) = (1 + 0{,}0075)^{12} \Rightarrow i = (1 + 0{,}0075)^{12} - 1 = 0{,}09380689 \text{ anual}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 4.17

Calcular el tipo de interés mensual equivalente al 6% anual capitalizable semestralmente.

Resolución

Del tipo nominal anual capitalizable semestralmente se calcula el tipo de interés semestral, considerando que $m = 2$, ya que en un año existen 2 semestres:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{0{,}06}{2} = 0{,}03 \text{ semestral}$$

Con el tipo de interés semestral se calcula el tipo de interés mensual equivalente. Tenemos, pues, que el tipo de interés del período es el 3% semestral, el tipo de interés del subperíodo es el $i^{(k)}$ mensual y que el número de subperíodos es $k = 6$, ya que en un semestre hay 6 meses. El tipo de interés mensual es:

$$(1 + 0{,}03) = (1 + i^{(k)})^6 \Rightarrow i^{(k)} = (1 + 0{,}03)^{1/6} - 1 = 0{,}004938622 \text{ mensual}$$

EJERCICIO 4.18

Calcular el tanto nominal anual capitalizable mensualmente equivalente al 3% trimestral.

Resolución

Para determinar el tipo nominal anual capitalizable mensualmente nos hace falta calcular previamente el tipo de interés mensual $i^{(m)}$, siendo $m = 12$, ya que en un año existen 12 meses. Teniendo en cuenta que en un trimestre hay 3 meses, el tipo de interés mensual equivalente al 3% trimestral es:

$$(1 + 0{,}03) = (1 + i^{(m)})^3 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}03)^{1/3} - 1 = 0{,}009901634 \text{ mensual}$$

Por lo que el tipo de interés anual capitalizable mensualmente es:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow j_{(m)} = 0{,}009901634 \times 12 = 0{,}118819608$$

EJERCICIO 4.19

Calcular el tanto nominal semestral acumulable trimestralmente equivalente al 7% anual convertible semestralmente.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Para determinar el tipo nominal semestral acumulable trimestralmente $j_{(m)} = m \times i^{(m)}$ es necesario determinar previamente el tipo de interés trimestral $i^{(m)}$ y posteriormente multiplicarlo por el valor $m = 2$, ya que en un semestre existen 2 trimestres.

El tipo de interés trimestral lo vamos a calcular a partir del 7% anual convertible semestralmente. De dicho tipo nominal se obtiene el tipo de interés efectivo semestral, ya que en un año existen 2 semestres:

$$j_{(k)} = k \times i^{(k)} \Rightarrow i^{(k)} = \frac{0{,}07}{2} = 0{,}035 \text{ semestral}$$

Con el tipo de interés semestral se calcula el tipo de interés trimestral, teniendo en cuenta que en un semestre hay 2 trimestres:

$$(1 + 0{,}035) = (1 + i^{(m)})^2 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}035)^{1/2} - 1 = 0{,}017342497 \text{ trimestral}$$

Por tanto, el tipo de interés semestral acumulable trimestralmente es:

$$j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow j_{(m)} = 0{,}017349497 \times 2 = 0{,}034698994$$

4.3.4. Capitalización fraccionada y capitalización continua

Cuando los intereses se acumulan por períodos inferiores al año, es decir, cada $\frac{1}{m}$ de año, se dice que la capitalización es fraccionada. Por ejemplo, si un individuo impone un cierto capital en capitalización compuesta durante varios años al 1% trimestral, nos encontramos ante una capitalización fraccionada, ya que los intereses se devengan cada trimestre.

Teniendo en cuenta la relación existente entre tantos equivalentes: $(1 + i^{(m)})^m = 1 + i$, la ecuación de equivalencia financiera es:

$$C_n = C_0(1 + i)^n \Rightarrow C_n = C_0(1 + i^{(m)})^{m \times n}$$

Si expresamos dicha ecuación en función del tanto nominal, nos queda:

$$C_n = C_0 \left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m \times n}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 4.20

Se impone un capital de 5.000 euros en capitalización compuesta durante 3 años al 9% anual pagadero semestralmente. Calcular los intereses totales generados.

Resolución

El importe de los intereses totales se calcula a través de la expresión $I = C_n - C_0$. Para ello, es preciso determinar el tipo de interés semestral correspondiente al 9% anual pagadero semestralmente: $j_{(m)} = m \times i^{(m)} \Rightarrow i^{(m)} = \frac{0{,}09}{2} = 0{,}045$ semestral.

Por tanto, los intereses totales generados son:

$$I = C_n - C_0 = 5.000[(1 + 0{,}045)^6 - 1] = 1.511{,}30\ €$$

Si en la capitalización fraccionada el número de fraccionamientos m aumenta, la amplitud $\frac{1}{m}$ del intervalo entre dos capitalizaciones de intereses disminuye. Así, por ejemplo, si $m = 2$ los intereses se acumulan por semestres, y la amplitud es $\frac{1}{2}$; en cambio, si $m = 12$ los intereses se acumulan cada mes y la amplitud es $\frac{1}{12}$. En general, cuando el número de fraccionamientos m tiende a infinito ($m \to \infty$), la amplitud $\frac{1}{m}$ tiende a cero $\left(\frac{1}{m} \to 0\right)$, produciéndose los intereses en intervalos infinitesimales de tiempo, o sea, de forma instantánea o continua en el tiempo. Por tanto, podemos definir la **capitalización continua** como aquella en la que la acumulación de intereses se realiza de forma instantánea.

Recordemos que la ecuación de equivalencia financiera en la capitalización fraccionada es:

$$C_n = C_0\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m \times n} \Rightarrow C_n = C_0\left[\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^{m}\right]^{n}$$

Si el número de fraccionamientos tiende a infinito, el tipo de interés nominal pactado constituye un **tipo nominal acumulable instantáneamente** o, simplemente, un **tanto instantáneo,** que representamos por k, siendo: $\lim_{m \to \infty} j_{(m)} = k$. En tal caso, el montante o capital final se obtiene al calcular el límite de la expresión anterior cuando $m \to \infty$:

© Ediciones Pirámide

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left[\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m\right]^n$$

Recordemos que $\lim_{x\to\infty}\left(1 + \frac{a}{x}\right)^x = e^a$, y por ello:

$$C_n = \lim_{m\to\infty} C_0\left[\left(1 + \frac{j_{(m)}}{m}\right)^m\right]^n = C_0(e^k)^n$$

De manera que la ecuación de equivalencia financiera en capitalización continua es:

$$C_n = C_0 \times e^{n\times k}$$

siendo k el tipo de interés continuo o tanto instantáneo de capitalización, referido a la misma unidad de tiempo que n. El significado financiero del tanto instantáneo es el de interés nominal asociado a intervalos infinitesimales de tiempo.

Si queremos determinar el tipo efectivo anual en capitalización compuesta, equivalente a un tanto en capitalización continua, tenemos:

$$C_n = C_0(1 + i)^n = C_0 \times e^{n\times k}$$

Y en consecuencia, la relación entre el tipo efectivo anual i y el tipo instantáneo anual k, es la siguiente:

$$1 + i = e^k \Rightarrow k = log_e(1 + i)$$

EJERCICIO 4.21

Se impone un capital de 30.000 € al 6% anual instantáneo. Calcular el montante al final de año 4 y del año 10.

Resolución

El capital final o montante en 4 se obtiene a través de la ecuación de equivalencia financiera: $C_n = 30.000 \times e^{0,06\times 4} = 38.137,47$ €. El capital equivalente en el año 10 se puede obtener a través del capital inicial o del equivalente en el año 4:

$$C_{10} = 30.000 \times e^{0,06\times 10} = 38.137,47 \times e^{0,06\times 6} = 54.663,56 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 4.22

Se tiene un capital de 12.000 euros con vencimiento dentro de 10 años. Sabiendo que el tipo de interés es el 1 % mensual instantáneo, calcular el valor actual de dicho capital y el tipo de interés anual equivalente al mencionado tipo de interés mensual instantáneo.

Resolución

En primer lugar, y para determinar el valor actual del capital con vencimiento dentro de 10 años, se utiliza la ecuación de equivalencia financiera, expresando la duración en meses: $C_0 = 12.000 \times e^{-0,01 \times 120} = 3.614,33$ euros. En segundo lugar, y para calcular el tipo de interés compuesto anual equivalente al 1 % instantáneo mensual, se plantea la ecuación de equivalencia financiera de la capitalización compuesta y la de capitalización continua:

$$C_n = C_0(1 + i)^{10} = C_0 \times e^{10 \times 12 \times 0,01} \Rightarrow i = 12,7497\%$$

O también: $1 + i = e^k \Rightarrow i = e^{0,01 \times 12} - 1 = 12,7497\%$.

4.3.5. Capitalización con intereses anticipados

Tal y como se ha expuesto, la ecuación de equivalencia financiera en el sistema de capitalización compuesta es $C_n = C_0(1 + i)^n$, y si tenemos en cuenta la relación existente entre el tipo de interés vencido y el tipo de interés anticipado o prepagable, $(1 + i)(1 - i^*) = 1$, al sustituir en la expresión anterior se obtiene:

$$C_n = C_0(1 - i^*)^{-n}$$

Si despejamos el capital C_0, se llega a la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta con intereses anticipados:

$$C_0 = C_n(1 - i^*)^n$$

El importe de los intereses totales anticipados o prepagables es:

$$I^* = C_n - C_0 = C_n[1 - (1 - i^*)^n]$$

siendo:

C_0: Capital inicial o valor actual.
C_n: Capital final o montante.

© Ediciones Pirámide

n: Número de períodos de tiempo.
i^*: Tipo de interés anticipado unitario.
I^*: Intereses totales anticipados.

EJERCICIO 4.23

Se presta un capital de cuantía nominal 50.000 euros, durante 5 años, en capitalización compuesta a un tipo de interés anticipado del 8% anual. Determinar el importe de los intereses anticipados y el tipo de interés vencido equivalente a dicho tipo de interés.

Resolución

El capital inicial o cuantía neta, líquida o efectiva que se desembolsa al inicio de la operación se obtiene al aplicar la ecuación de equivalencia financiera con intereses anticipados: $C_0 = 50.000(1 - 0{,}08)^5 = 32.954{,}08$ euros. El importe de los intereses anticipados o precio financiero total anticipado es $I^* = 50.000 - 32.954{,}08 = 17.045{,}92$ euros.

La cuantía de 50.000 € la denominamos importe nominal, pues la que realmente se entrega en préstamo es 32.954,08 €, debiendo devolverse al final de los cinco años el importe de 50.000 euros.

Para obtener el tipo de interés vencido o pospagable i equivalente al tipo de interés prepagable o anticipado $i^* = 0{,}08$ anual, sustituimos en la expresión $i = \dfrac{i^*}{1 - i^*}$.

En consecuencia, tenemos: $i = \dfrac{0{,}08}{1 - 0{,}08} = 0{,}086956$ anual.

Otra forma de calcular el tipo de interés vencido equivalente al 8% anual anticipado es planteando la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta, sabiendo que $C_0 = 32.954{,}08$ euros y $C_n = 50.000$ euros:

$$50.000 = 32.954{,}08(1 + i)^5 \Rightarrow i = 0{,}086956 \text{ anual}$$

4.4. SISTEMA FINANCIERO DE DESCUENTO SIMPLE COMERCIAL

4.4.1. Concepto y ecuación de equivalencia financiera

Valorar capitales financieros con el sistema de descuento simple comercial implica que cuando un sujeto, a efectos de anticipar su cobro, cede un capital (C, t) para percibir el capital (V, p) equivalente o sustituto en $p < t$, acepta lo siguiente:

© Ediciones Pirámide

a) El precio financiero total D_{SC} es proporcional a la cuantía C a descontar, al número de períodos $t - p$ y al tipo de descuento d.

b) El precio financiero total se abona en p.

De acuerdo con las hipótesis establecidas, tenemos que $D_{SC} = C(t - p)d$, por lo que se verifica $V = C - D = C - C \times d(t - p) = C[1 - d(t - p)]$, siendo la ley financiera unitaria del sistema de descuento simple comercial[3]:

$$A(t; p) = 1 - d(t - p) \text{ con } p < t$$

Es preciso destacar que la amplitud del intervalo temporal $(t - p)$ y el tipo de descuento d han de estar referidos a la misma unidad de tiempo.

Si dos sujetos deciden intercambiar los capitales financieros (C_0, t_0) y (C_n, t_n) según el sistema de descuento simple comercial, realizarán dicho intercambio si los dos capitales mencionados son equivalentes, debiéndose cumplir:

$$(C_0, t_0) \sim (C_n, t_n) \Rightarrow C_0 \times A(t_0; p) = C_n \times A(t_n; p)$$

$$C_0[1 - d(t_0 - p)] = C_n[1 - d(t_n - p)]$$

$$C_0 = C_n \frac{1 - d(t_n - p)}{1 - d(t_0 - p)}$$

En la aplicación práctica de este sistema de descuento se utiliza como punto p de aplicación el vencimiento del primer capital: $p = t_0$. Si tomamos $t_n - t_0 = n$ se obtiene la ecuación de equivalencia financiera:

$$C_0 = C_n(1 - n \times d)$$

El importe del descuento simple comercial es:

$$D_{SC} = C_n - C_0 = C_n \times n \times d$$

siendo:

C_0: Capital inicial, valor actual o valor descontado.
C_n: Capital final o capital a descontar.
n: Número de períodos de tiempo.
d: Tipo de descuento unitario.
D_{SC}: Descuento simple comercial o precio financiero total.

[3] Recordemos que $V = C \times A(t; p)$.

© Ediciones Pirámide

En este sistema, el precio financiero total o descuento simple comercial se calcula sobre el capital final o capital a descontar.

EJERCICIO 4.24

Una persona descuenta un capital de 3.000 euros con vencimiento dentro de 4 meses. Calcular el valor actual y el descuento simple comercial, sabiendo que el tipo de descuento es el 7% anual.

Resolución

El capital inicial o valor descontado se obtiene aplicando la ecuación de equivalencia financiera: $C_0 = 3.000\left(1 - \frac{4}{12} \times 0{,}07\right) = 2.930$ euros.

El importe del descuento simple comercial o precio financiero total es $D_{SC} =$ $= 3.000 - 2.930 = 70$ euros.

EJERCICIO 4.25

Se descuenta un capital de 24.000 euros con vencimiento dentro de 80 días. Calcular el descuento simple comercial para un tipo de descuento del 5% anual.

Resolución

Para calcular el precio financiero total o descuento simple comercial se suele tomar el año comercial (360 días), por lo que en consecuencia se tiene: $D_{SC} =$ $= 24.000 \times \frac{80}{360} \times 0{,}05 = 266{,}67$ euros.

EJERCICIO 4.26

Un capital de cuantía 30.000 €, con vencimiento el 2 de noviembre de cierto año, es descontado el 15 de agosto de dicho año, obteniéndose un valor actual de 29.736,67 €. Determinar el tipo de descuento aplicado.

Resolución

El número de días de descuento es 79, por lo que la ecuación de equivalencia financiera es: $29.736{,}67 = 30.000\left(1 - \frac{79}{360} \times d\right)$, obteniéndose un tipo de descuento del 4% anual.

© Ediciones Pirámide

4.4.2. Magnitudes derivadas

Para obtener las expresiones que nos permiten calcular el factor, el rédito y el tanto correspondientes al sistema financiero de descuento simple comercial, se toma el intervalo temporal (t_0, t_n) de amplitud $t_n - t_0 = n$, y se considera como punto p de aplicación el vencimiento del primer capital: $p = t_0$:

A) Factor de descuento:

$$v(t_0, t_n; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{C_n(1 - n \times d)}{C_n} = 1 - n \times d$$

B) Rédito de descuento:

$$d(t_0, t_n; p) = 1 - v(t_0, t_n; p) = 1 - (1 - n \times d) = n \times d$$

C) Tanto de descuento:

$$\delta(t_0, t_n; p) = \frac{d(t_0, t_n; p)}{n} = \frac{n \times d}{n} = d$$

Por consiguiente, el tanto de descuento d representa el precio financiero total por unidad de capital final y por unidad de tiempo, denominándose **tipo de descuento.**

EJERCICIO 4.27

Se descuenta un capital de 2.000 € durante 2 meses, obteniéndose un valor descontado de 1.960 €. Calcular el factor, el rédito y el tanto de descuento asociados a dicho intervalo temporal.

Resolución

La amplitud del intervalo temporal es $n = 2$ meses, por lo que se verifica:

Factor de descuento: $v(0,2; p) = \frac{C_0}{C_n} = \frac{1.960}{2.000} = 0,98$

Rédito de descuento: $d(0,2; p) = 1 - v(0,2; p) = 1 - 0,98 = 0,02$

Tanto de descuento: $\delta(0,2; p) = \frac{d(0,2; p)}{n} = \frac{0,02}{2} = 0,01$

© Ediciones Pirámide

El rédito de descuento $d(0,2; p) = 0,02$ nos indica el descuento simple comercial o precio financiero total por anticipar una unidad monetaria durante un plazo de 2 meses. El tanto de descuento $\delta(0,2; p) = 0,01$ indica el precio financiero medio o descuento mensual por unidad de capital y promedio por unidad de tiempo, para un intervalo temporal de 2 meses.

4.4.3. Tantos equivalentes

Dos tantos d y $d^{(m)}$, referidos a distintas unidades de tiempo, son equivalentes cuando para un mismo capital a descontar y durante el mismo tiempo, producen idéntico valor actual o capital inicial. Por ejemplo, el valor actual de cierto capital con vencimiento dentro de 2 años, descontado al 3% anual, coincide con el que se obtendría si se descontase al tipo mensual equivalente durante 24 meses.

Así, para un capital final C_n que se descuente durante n períodos al tipo de descuento d, estando referidos n y d a la misma unidad de tiempo, el capital inicial es $C_0 = C_n(1 - n \times d)$. Si, por el contrario, a dicho capital C_n descontado durante el mismo período temporal, se le aplica un tipo de descuento $d^{(m)}$ referido a otra unidad de tiempo de amplitud $\frac{1}{m}$, el capital descontado sería $C_0 = C_n(1 - m \times n \times d^{(m)})$.

En el supuesto de que ambos tipos de descuento d y $d^{(m)}$ sean equivalentes, la cuantía de ambos capitales iniciales deben ser iguales. Por tanto:

$$C_n(1 - n \times d) = C_n(1 - m \times n \times d^{(m)})$$

Obteniéndose la siguiente relación: $d^{(m)} = \frac{d}{m}$, siendo:

- d: Tipo de descuento unitario.
- $d^{(m)}$: Tanto o tipo de descuento del subperíodo.
- m: Número de subperíodos existentes en cada unidad de tiempo a la que va referido d.

Normalmente d va referido al año, por lo que $d^{(m)}$ será de periodicidad inferior al mismo (por ejemplo: semestral, trimestral, mensual...), con $m = 2, 4, 12$, respectivamente. De manera que si tenemos un tipo de descuento del 6% anual, el equivalente semestral es: $d^{(m)} = \frac{0,06}{2} = 0,03$.

EJERCICIO 4.28

Calcular el descuento simple comercial de un capital de 8.000 euros con vencimiento dentro de 5 meses al 9% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Primero se determina el tipo de descuento mensual equivalente al 9% anual: $d^{(m)} = \frac{0{,}09}{12} = 0{,}0075$ mensual. A continuación se calcula el importe del descuento simple comercial, sustituyendo en la siguiente expresión: $D_{SC} = C_n \times n \times d = 8.000 \times \times 5 \times 0{,}0075 = 300$ euros.

4.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Se impone un capital financiero en capitalización simple durante 5 meses al 0,75% trimestral, y a continuación los intereses generados se colocan nuevamente en capitalización simple durante 6 meses al 4% anual. Sabiendo que el montante constituido en esta segunda imposición es de 1.530 euros, calcular la cuantía del capital impuesto inicialmente.

Resolución

Si denominamos C_0 al capital impuesto inicialmente en capitalización simple, y sabiendo que el tipo de interés mensual equivalente al 0,75% trimestral es $i^{(m)} = \frac{0{,}0075}{3} = 0{,}0025$, el importe de los intereses generados al cabo de los 5 meses es: $I = C_0 \times 5 \times 0{,}0025 = 0{,}0125C_0$. La cuantía de estos intereses se impone nuevamente en capitalización simple durante 6 meses al 4% anual, por lo que se verifica:

$$1.530 = 0{,}0125C_0\left(1 + 6\frac{0{,}04}{12}\right) \Rightarrow C_0 = 120.000 \text{ euros}$$

2. Se desea colocar un capital en capitalización compuesta durante 10 años al 6,09% anual, con la finalidad de obtener en el último semestre unos intereses de 1.500 euros. Calcular el importe del capital impuesto inicialmente.

Resolución

El tipo de interés semestral equivalente al 6,09% anual es:

$$(1 + i^{(m)})^2 = 1 + 0{,}0609 \Rightarrow i^{(m)} = (1 + 0{,}0609)^{1/2} - 1 = 0{,}03 \text{ semestral}$$

Tras la imposición del capital C_0 durante 9 años y medio, o lo que es lo mismo durante 19 semestres, se obtendría un montante o capital constituido de $C_{19} = C_0(1 + 0{,}03)^{19}$. De manera que los intereses correspondientes al último semestre

© Ediciones Pirámide

se obtiene a través de la expresión siguiente: $I_{20} = C_{19} \times i^{(m)}$. Sustituyendo en la misma, se tiene el importe del capital impuesto al inicio de la operación:

$$1.500 = C_0(1 + 0{,}03)^{19} \times 0{,}03 \Rightarrow C_0 = 28.514{,}30\ €$$

3. Un individuo deposita en una entidad financiera un capital de 15.000 euros durante 18 años a un interés compuesto del 4% anual. Sabiendo que al final de cada uno de los 13 últimos años retira el 25% de los intereses generados para atender diversos gastos, calcular el montante al finalizar los 18 años.

Resolución

Para calcular el montante o capital constituido al final de los cinco primeros años, en los que no se retira cuantía alguna, se utiliza la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta: $C_5 = 15.000(1 + 0{,}04)^5 = 18.249{,}79$. Para determinar el montante al final de los trece siguientes, en los que se retira el 25% de los intereses generados, es preciso deducir una nueva ecuación de equivalencia financiera. El capital constituido al final de cada año en función del capital constituido al final del período anterior es $C_s = C_{s-1}(1 + i)$. Si se retira el 25% de los intereses generados, se obtendrá:

$$C_6 = C_5(1 + i) - 0{,}25 \times C_5 i = C_5(1 + 0{,}75 \times i)$$

$$C_7 = C_6(1 + i) - 0{,}25 \times C_6 i = C_6(1 + 0{,}75 \times i) = C_5(1 + 0{,}75 \times i)^2$$

$$C_8 = C_7(1 + i) - 0{,}25 \times C_7 i = C_7(1 + 0{,}75 \times i) = C_5(1 + 0{,}75 \times i)^3$$

Y así sucesivamente hasta el año 18: $C_{18} = C_5(1 + 0{,}75 \times i)^{13}$. En consecuencia, al sustituir llegamos a: $C_{18} = 18.249{,}79(1 + 0{,}75 \times 0{,}04)^{13} = 26.800{,}43$ €.

Es interesante señalar que en los últimos 13 años, al retirar el 25% de los intereses que se producen en cada período, los que se acumulan son el 75% restante, por lo que el tipo de interés al que se produce la acumulación citada equivale al 75% del tipo inicial.

4. Se impone un capital de 24.000 euros en capitalización simple durante 9 meses al 2% cuatrimestral. El montante constituido se impone en capitalización compuesta durante 25 meses, obteniéndose unos intereses totales de 2.168,27 €. Calcular el tipo de interés anual pagadero trimestralmente aplicado en la imposición en capitalización compuesta.

Resolución

Si se impone inicialmente 24.000 € en capitalización simple durante 9 meses, siendo el tipo de interés mensual equivalente al 2% cuatrimestral del $i^{(k)} = \dfrac{0{,}02}{4} = 0{,}005$,

© Ediciones Pirámide

el importe del montante constituido al cabo de 9 meses es: $C_9 = 24.000(1 + 9 \times \times 0{,}005) \Rightarrow C_9 = 25.080$. Dicho importe se coloca durante 25 meses en capitalización compuesta, obteniéndose unos intereses totales de 2.168,27, por lo que el tipo de interés trimestral utilizado en la valoración es:

$$2.168{,}27 = 25.080\left[\left(1 + i^{(m)}\right)^{\frac{25}{3}} - 1\right] \Rightarrow i^{(m)} = 0{,}01 \text{ trimestral}$$

El tipo de interés anual pagadero trimestralmente se obtiene multiplicando el tipo trimestral por el número de trimestres que hay en un año: $j_{(m)} = m \times i^{(m)} = = 4 \times 0{,}01 = 0{,}04$.

5. Se presta un capital de cuantía nominal 15.000 € durante 42 meses en capitalización compuesta con intereses anticipados. Para los 27 primeros meses el tipo de interés anticipado es del 5% anual y para los restantes es del 6% anual. Determinar el tipo medio de interés vencido equivalente.

Resolución

Para obtener el tipo de interés vencido o pospagable i equivalente a un tipo de interés prepagable o anticipado i^* se utiliza la expresión $i = \frac{i^*}{1 - i^*}$. Sin embargo, como tenemos dos tipos de interés anticipados, hemos de obtener el tipo de interés medio vencido a través de la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta $C_n = C_0(1 + i)^n$. Para ello, es necesario determinar el importe de C_0, que constituye la cuantía neta, líquida o efectiva prestada en el origen de la operación. Dicho importe se obtiene planteando la ecuación de equivalencia con intereses anticipados, y teniendo en cuenta que existen dos tipos de interés:

$$C_0 = 15.000(1 - 0{,}05)^{27/12} \times (1 - 0{,}06)^{15/12} = 12.370{,}27$$

A continuación se plantea la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta con intereses pospagables, para obtener el tipo de interés medio anual pospagable utilizado en la valoración:

$$15.000 = 12.370{,}27(1 + i)^{42/12} \Rightarrow i = 0{,}0566173 \text{ anual}$$

6. Debemos cancelar hoy una deuda de 30.000 € y proponemos al acreedor entregarle a cambio dos capitales de cuantía 20.000 € cada uno, con vencimientos respectivos dentro de 4 y de 8 años. Determinar el tipo de interés compuesto de la operación.

© Ediciones Pirámide

Resolución

La operación anterior supone intercambiar el capital (30.000,0) por los capitales (20.000,4) y (20.000,8). En consecuencia, la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta es:

$$30.000 = 20.000(1 + i)^{-4} + 20.000(1+i)^{-8}$$

Efectuando el cambio $(1 + i)^{-4} = x$, y simplificando se obtiene: $x^2 + x - 1{,}5 = 0$. Al resolver, y tomando sólo el valor positivo de x, llegamos a: $(1 + i)^{-4} = 0{,}822875655$, por lo que el tipo de interés anual es el 4,9945%.

7. Se descuentan simultáneamente dos capitales mediante el sistema de descuento simple comercial. El primero es de cuantía 900 euros y vencimiento dentro de 45 días, el segundo capital asciende a 1.300 euros y vence dentro de 60 días. Calcular el valor actual total y la cuantía del descuento, sabiendo que el tipo de descuento es el 9% anual.

Resolución

El capital inicial o valor descontado de los dos capitales se obtiene como:

$$C_0 = 900\left(1 - \frac{45}{360} \times 0{,}09\right) + 1.300\left(1 - \frac{60}{360} \times 0{,}09\right) = 2.170{,}38\ €.$$

El importe total del descuento simple comercial o precio financiero total es $D_{SC} = 900 + 1.300 - 2.170{,}38 = 29{,}62\ €$.

También podemos determinar el importe del descuento total de la siguiente forma:

$$D = 900 \times \frac{45}{360} \times 0{,}09 + 1.300 \times \frac{60}{360} \times 0{,}09 = 29{,}62\ €$$

8. Una empresa debe pagar una letra de nominal 30.000 € dentro de 180 días. Acuerda con su acreedor efectuar dos pagos, venciendo el primero dentro de 150 días y el segundo dentro de 300 días. Sabiendo que la cuantía del primer pago es de 20.000 €, determinar la cuantía del segundo, si la operación se valora utilizando la ley de descuento simple comercial aplicada en el momento actual y con un tipo de descuento del 5% anual.

Resolución

De acuerdo con lo señalado en cuanto a la aplicación de la ley de descuento simple comercial en el momento actual, ha de verificarse que el valor actual de

© Ediciones Pirámide

30.000 € con vencimiento dentro de 180 días, ha de ser igual a la suma del valor actual de los dos capitales que le sustituyen. Por tanto, denominando X a la cuantía a pagar dentro de 300 días, tenemos:

$$30.000\left(1 - \frac{180}{360} \times 0{,}05\right) = 20.000\left(1 - \frac{150}{360} \times 0{,}05\right) + X\left(1 - \frac{300}{360} \times 0{,}05\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow X = 10.086{,}96\ €$$

9. Se impone un capital de 50.000 € en capitalización compuesta durante 12 años a un tipo de interés X anual convertible semestralmente. A continuación, el montante resultante se impone en capitalización simple durante 25 meses al 6% semestral. Si la cuantía acumulada al finalizar la segunda operación es de 201.568,75 €, determinar el tipo de interés X.

Resolución

Si se impone un capital de cuantía 50.000 euros en capitalización compuesta durante 12 años a un tipo de interés semestral $i^{(m)}$, el montante constituido es: $C_{12} = 50.000\ (1 + i^{(m)})^{24}$. Si posteriormente se coloca durante 25 meses en capitalización simple al 6% semestral, se verifica:

$$201.568{,}75 = 50.000(1 + i^{(m)})^{24}\left(1 + 25 \times \frac{0{,}06}{6}\right) \Rightarrow i^{(m)} = 0{,}05 \text{ semestral}$$

En consecuencia, el tipo de interés X anual pagadero semestralmente es: $j_{(m)} = m \times i^{(m)} = 2 \times 0{,}05 = 0{,}10$.

4.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular los siguientes tipos de interés en capitalización compuesta:

a) Tipo de interés cuatrimestral equivalente al 2% trimestral.
b) Tipo de interés trienal equivalente al 8% anual capitalizable mensualmente.
c) Tipo de interés semestral convertible trimestralmente equivalente al 1% mensual.
d) Tipo de interés bienal pagadero semestralmente equivalente al 3% trimestral.

2. Se impone un capital de 1.800 € durante 6 meses en capitalización simple, obteniéndose un capital final de 1.827 €. Calcular el factor, el rédito y el tanto de capitalización asociados a dicho intervalo temporal.

© Ediciones Pirámide

3. Se impone un capital de 15.000 euros en una entidad financiera que ofrece, en capitalización simple, el 5% anual durante los primeros 6 meses, y a continuación el 3% anual durante los restantes meses. Determinar la duración total de la imposición para obtener unos intereses totales de 1.950 euros.

4. Se impone en capitalización simple durante 6 meses un capital de 60.000 € al 2,5% anual. Posteriormente, el montante constituido se impone en capitalización compuesta durante 4 años al 3,5% anual. Calcular en esta segunda imposición los intereses periódicos generados en cada uno de los cuatro años.

5. Se presta un capital en capitalización compuesta durante 8 años a los siguientes tipos de interés: durante los cinco primeros años al 6% anual, y en los restantes años al 8% anual acumulable trimestralmente. Calcular el capital inicial, sabiendo que los intereses generados en el primer trimestre del año siete ascienden a 81,12 euros.

6. Se impone un capital en capitalización compuesta durante 3 años al 6,09% anual, retirándose al final de cada semestre el 10% de los intereses generados. El montante constituido se impone en capitalización simple durante 18 meses al 4% anual, obteniéndose en la última imposición unos intereses totales de 5.068,82 euros. Calcular el capital impuesto inicialmente en capitalización compuesta.

7. Se presta un capital de nominal de 24.000 euros en capitalización compuesta con intereses anticipados durante 10 años. Calcular el tipo de interés anual anticipado aplicado en la operación, sabiendo que el importe de los intereses anticipados asciende a 8.044,02 euros.

8. Se descuenta un capital con vencimiento dentro de 30 días mediante el sistema de descuento simple comercial a un tipo de descuento del 8% anual. Determinar el valor actual de dicho capital sabiendo que el descuento simple comercial asciende a 40 euros.

9. El valor actual al 25 de abril de cierto año, con la ley de descuento simple comercial, de un capital con vencimiento el 23 de julio de dicho año, es 9.876,39 €. Determinar la cuantía de dicho capital, si el tipo anual de descuento aplicado es el 5%.

10. Una determinada empresa ha de pagar a un mismo acreedor dos letras de cuantía 20.000 y 15.000 euros, con vencimientos respectivos el 15 de abril y el 24 de octubre de cierto año. El día 7 de marzo de dicho año propone a su acreedor sustituir ambas letras por otra de cuantía a determinar y vencimiento el 20 de

© Ediciones Pirámide

agosto de dicho año. Calcular dicha cuantía si acuerdan aplicar la ley de descuento simple comercial el día 7 de marzo, con un tipo de descuento del 5% anual.

11. Se impone cierto capital durante 20 años en capitalización compuesta. Durante los primeros ocho años al 6% anual, y durante los siguientes al 8% anual, pero retirando en éstos, al final de cada año, el 20% de los intereses producidos en el respectivo año. Así, los intereses retirados al final del año 12 ascienden a 307.179,19 €. Determinar el montante al final del año 20.

© Ediciones Pirámide

5 Rentas financieras

OBJETIVOS

- Establecer el concepto de renta financiera.
- Analizar el concepto y determinar el valor capital o financiero de una renta.
- Enumerar y diferenciar los distintos tipos de rentas financieras.

SUMARIO

5.1. Concepto.
5.2. Valor capital o financiero de una renta.
5.3. Clasificación de las rentas financieras.
5.4. Ejercicios y problemas resueltos.
5.5. Ejercicios y problemas propuestos.

5.1. CONCEPTO

Teniendo en cuenta los conceptos de capital financiero y de operación financiera, en la actividad económica nos encontramos con conjuntos de capitales con distintos vencimientos a los que se les denomina rentas financieras. Así, por ejemplo, el sueldo mensual que percibe un trabajador, o las cuantías periódicas que debe abonar una persona para devolver un préstamo, constituyen rentas. En general, se define una renta financiera como **«un conjunto de capitales financieros que han de hacerse efectivos en distintos vencimientos».**

Cada uno de los capitales financieros que constituyen la renta recibe el nombre de **término de la renta** y están asociados a los subintervalos temporales en los que se generan, los cuales se denominan períodos de maduración. Así, por ejemplo, el sueldo mensual de un trabajador se genera a lo largo de cada mes.

Gráficamente, podemos representar una renta financiera:

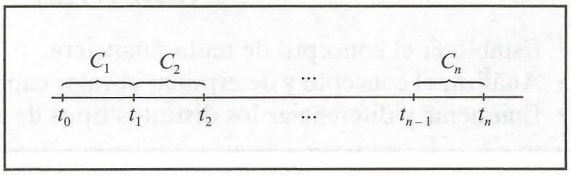


Figura 5.1.

En la definición de renta podemos distinguir dos elementos:

a) Un conjunto de capitales financieros: $\{(C_1, t_1), (C_2, t_2), \ldots (C_n, t_n)\}$.

b) La existencia de un intervalo temporal, $[t_0, t_n]$, divisible en n subintervalos.

© Ediciones Pirámide

Además, en toda renta podemos señalar su origen, final y duración. Así:

— El **origen de la renta** es el extremo inferior del subintervalo en el que vence el primer capital.
— El **final de la renta** es el extremo superior del subintervalo en el que vence el último capital.
— La **duración** de la renta es el tiempo que media entre el origen y el final de la misma.

En el siguiente gráfico señalamos los conceptos indicados:

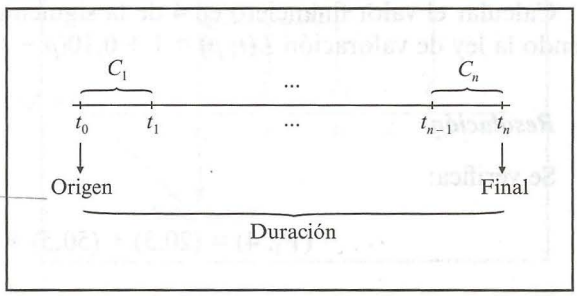


Figura 5.2.

5.2. VALOR CAPITAL O FINANCIERO DE UNA RENTA

Definida una renta financiera y elegida una ley financiera de valoración, denominamos valor capital o financiero de la misma, en un determinado momento del tiempo q, a la suma financiera en ese punto de los capitales financieros que la constituyen.

De modo general, tenemos:

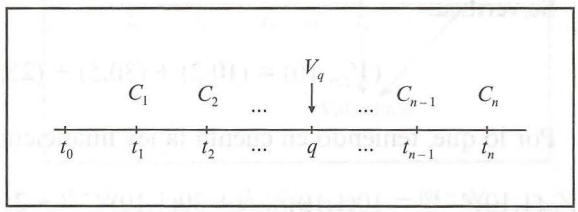


Figura 5.3.

© Ediciones Pirámide

El valor financiero en q verifica:

$$(V_q, q) = (C_1, t_1) + (C_2, t_2) + \ldots + (C_n, t_n)$$

$$V_q \times F(q; p) = C_1 \times F(t_1; p) + C_2 \times F(t_2; p) + \ldots + C_n \times F(t_n; p)$$

$$Vq = \frac{\sum_{s=1}^{n} C_s \times F(t_s; p)}{F(q; p)}$$

EJERCICIO 5.1

Calcular el valor financiero en 4 de la siguiente renta: {(20,3), (50,5), (30,7)}, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}10(p - t)$, $p = 10$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_4, 4) = (20,3) + (50,5) + (30,7)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

$$V_4[1 + 0{,}1(10 - 4)] = 20[1 + 0{,}1(10 - 3)] + 50[1 + 0{,}1(10 - 5)] +$$
$$+ 30[1 + 0{,}1(10 - 7)] \Rightarrow V_4 = 92{,}5$$

EJERCICIO 5.2

Calcular el valor financiero en 10 de la siguiente renta: {(10,2), (30,5), (25,8), (20,12)}, siendo la ley de valoración: $L(t; p) = (1 + 0{,}10)^{(p-t)}$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_{10}, 10) = (10,2) + (30,5) + (25,8) + (20,12)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

$$V_{10}(1{,}10)^{(p-10)} = 10(1{,}10)^{(p-2)} + 30(1{,}10)^{(p-5)} + 25(1{,}10)^{(p-8)} + 20(1{,}10)^{(p-12)} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow V_{10} = 116{,}53$$

© Ediciones Pirámide

En general, la valoración puede plantearse con cualquier ley financiera, pero en la práctica se suele utilizar la ley de capitalización compuesta.

Tal y como se ha señalado anteriormente, el valor financiero de una renta puede calcularse en cualquier momento del tiempo. No obstante, cabe destacar dos valores concretos:

a) **Valor inicial o actual:** es el valor de la renta en t_0 u origen de la misma, o en un punto anterior, dependiendo del tipo de renta. En cualquier caso, es el valor de la renta en un punto no posterior al origen de la renta. Gráficamente:

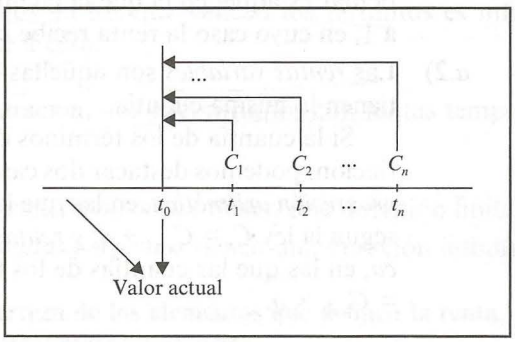


Figura 5.4.

b) **Valor final:** es el valor de la renta en t_n o final de la misma, o en un punto posterior, dependiendo del tipo de renta. En cualquier caso, es el valor de la renta en un punto no anterior al final de la renta. Gráficamente :

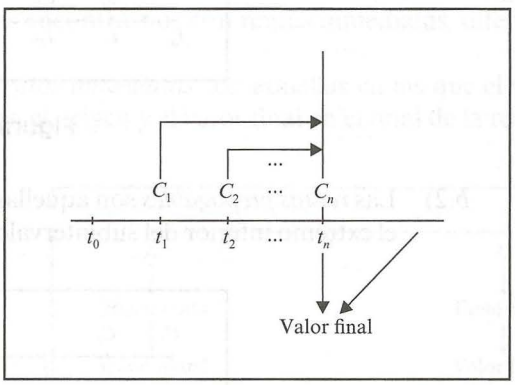


Figura 5.5.

© Ediciones Pirámide

5.3. CLASIFICACIÓN DE LAS RENTAS FINANCIERAS

Las rentas se pueden clasificar atendiendo a distintos criterios. Podemos señalar los siguientes:

a) Según **la cuantía de los términos,** podemos distinguir entre rentas constantes y rentas variables.

a.1) Las *rentas constantes* son aquellas en las que la cuantía de todos sus términos es la misma, es decir, $C_1 = C_2 = ... = C_n = C$. Un caso particular es aquel en el que la cuantía de todos los términos es igual a 1, en cuyo caso la renta recibe el nombre de renta unitaria.

a.2) Las *rentas variables* son aquellas en las que todos sus términos no tienen la misma cuantía.

Si la cuantía de los términos de la renta sigue alguna ley de variación, podemos destacar dos casos particulares: *rentas variables en progresión aritmética*, en las que las cuantías de los términos varían según la ley $C_s = C_{s-1} + d$; y *rentas variables en progresión geométrica*, en las que las cuantías de los términos varían según la ley $C_s = C_{s-1} \times q$.

b) Según **el vencimiento de los términos,** podemos encontrarnos con rentas pospagables y rentas prepagables.

b.1) Las *rentas pospagables* son aquellas en las que los términos vencen en el extremo superior del subintervalo al que pertenecen. Gráficamente:

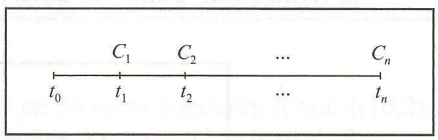


Figura 5.6.

b.2) Las *rentas prepagables* son aquellas en las que los términos vencen en el extremo inferior del subintervalo al que pertenecen. Gráficamente:

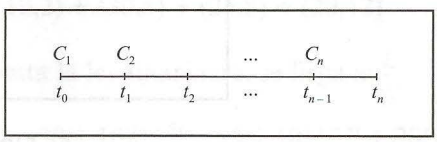


Figura 5.7.

© Ediciones Pirámide

c) Según **la medida o amplitud de los intervalos,** diferenciamos entre rentas discretas y rentas continuas.

c.1) Las *rentas discretas* son aquellas en las que la medida de los subintervalos en los que vencen los términos es finita. Podemos a su vez diferenciar entre rentas discretas de período uniforme, cuando todos los períodos de maduración o subintervalos tienen la misma amplitud, es decir, son constantes; y rentas discretas de período no uniforme, cuando los subintervalos no tienen la misma amplitud.

c.2) Las *rentas continuas* son aquellas en la que la medida de los subintervalos en los que vencen los términos es infinitésima, es decir, tiende a cero.

d) Según **la duración,** nos encontramos con rentas temporales y rentas perpetuas.

d.1) Las *rentas temporales* tienen una duración finita.

d.2) Las *rentas perpetuas* tienen una duración infinita.

e) Según **la certeza de los elementos que definen la renta,** distinguimos entre rentas ciertas y rentas aleatorias.

e.1) Las *rentas ciertas* son aquellas en las que todos los elementos que las definen son conocidos con certeza.

e.2) Las *rentas aleatorias* son aquellas en las que alguno o todos los elementos que las definen son aleatorios.

f) Según **la posición del punto de valoración** respecto al origen o final de la renta, podemos encontrarnos con rentas inmediatas, diferidas y anticipadas.

f.1) Las *rentas inmediatas* son aquellas en las que el valor actual se calcula en el origen y el valor final en el final de la renta. Gráficamente:

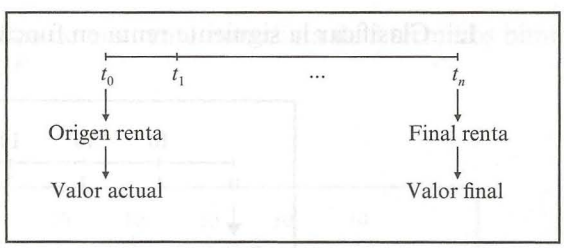


Figura 5.8.

© Ediciones Pirámide

f.2) Las *rentas diferidas* son aquellas en las que el punto de cálculo del valor actual está situado antes del origen, de manera que el mismo se calcula *d* períodos antes de dicho momento. Gráficamente:

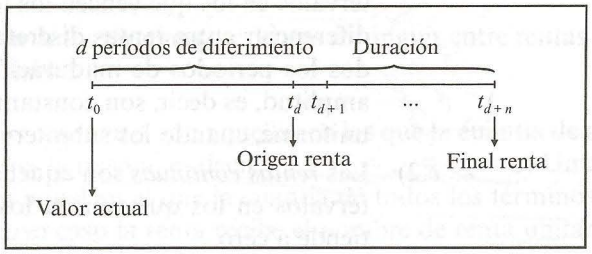


Figura 5.9.

f.3) Las *rentas anticipadas* son aquellas en las que el punto de cálculo del valor final está situado después del final de la renta, de modo que el mismo se calcula *h* períodos después de dicho momento. Gráficamente:

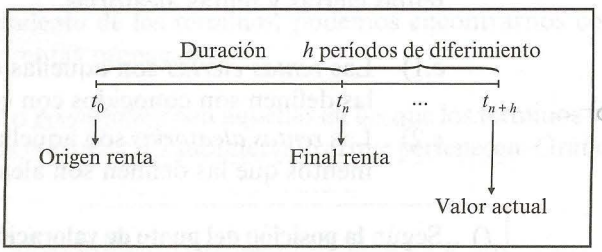
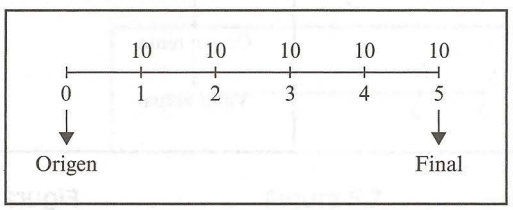


Figura 5.10.

5.4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Clasificar la siguiente renta en función de los seis criterios planteados:



© Ediciones Pirámide

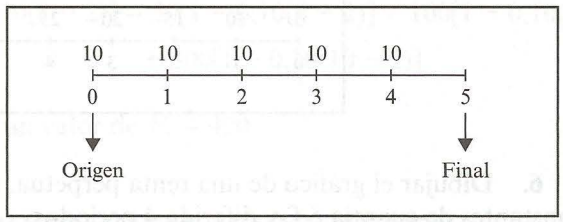
Resolución

Es una renta constante, pospagable, discreta de período uniforme, temporal, cierta e inmediata.

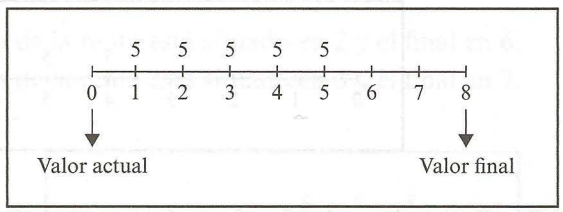
2. Dibujar el gráfico de la renta anterior, suponiendo que la misma sea prepagable.

Resolución

En este caso, el gráfico de la renta es el siguiente:



3. Clasificar la siguiente renta en función de los seis criterios planteados, si se quiere calcular su valor actual en 0 y su valor final en 8:

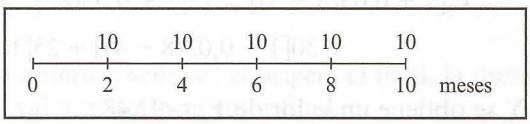


Resolución

Es una renta constante, pospagable, discreta, temporal, cierta y anticipada en 3 períodos.

4. Dibujar el gráfico de una renta inmediata de 5 términos bimestrales pospagables de cuantía 10 €.

Resolución

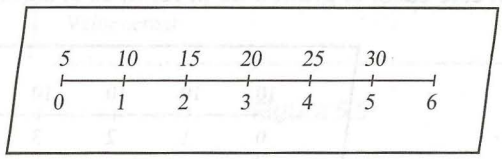


© Ediciones Pirámide

5. Dibujar el gráfico de una renta inmediata prepagable de 6 términos variables en progresión aritmética de razón $d = 5$, cuyo último término es de cuantía 30 €.

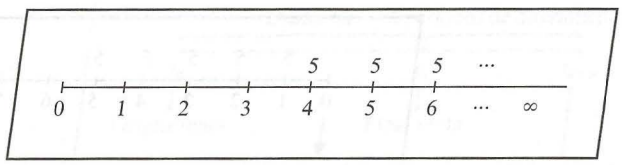
Resolución

Como los términos varían en progresión aritmética de razón $d = 5$, podemos obtener la cuantía del primer término en función de la del último, que es el sexto término, de manera que: $C_6 = C_1 + (6 - 1) \times d$, por lo que $30 = C_1 + (6 - 1) \times 5 \Rightarrow$ $\Rightarrow C_1 = 5$, siendo el gráfico pedido el siguiente:



6. *Dibujar el gráfico de una renta perpetua, prepagable, cuyos términos son constantes de cuantía 5 € y diferida 4 períodos.*

Resolución



7. Determinar el valor financiero en 5 de la siguiente renta: $\{(15,2), (20,3), (30,4), (25,6)\}$, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}03(p - t)$, $p = 8$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_5, 5) = (15,2) + (20,3) + (30,4) + (25,6)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

$$V_5[1 + 0{,}03(8 - 5)] = 15[1 + 0{,}03(8 - 2)] + 20[1 + 0{,}03(8 - 3)] + \\ + 30[1 + 0{,}03(8 - 4)] + 25[1 + 0{,}03(8 - 6)]$$

Y se obtiene un valor de $V_5 = 92{,}48$.

© Ediciones Pirámide

8. Calcular el valor financiero en 8 de la siguiente renta: {(50,4), (100,6), (300,10)}, siendo la ley de valoración $A(t; p) = 1 - 0{,}10(t - p)$, $p = 2$.

Resolución

Se verifica:

$$(V_8, 8) = (50,4) + (100,6) + (300,10)$$

Por lo que, teniendo en cuenta la ley financiera, se llega a:

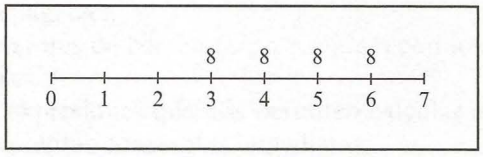
$$V_8[1 - 0{,}10(8 - 2)] = 50[1 - 0{,}10(4 - 2)] + 100[1 - 0{,}10(6 - 2)] + \\ + 300[1 - 0{,}10(10 - 2)]$$

Y se obtiene un valor de $V_8 = 400$.

5.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Describir y clasificar la siguiente renta si se quiere calcular su valor actual en 0, suponiendo que:

a) El origen de la renta está situado en 2 y el final en 6.
b) El origen de la renta está situado en 3 y el final en 7.



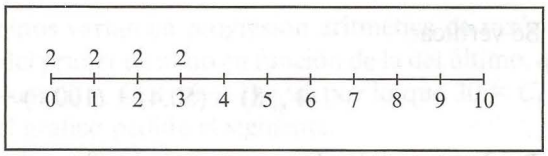
2. Dibujar el gráfico de una renta pospagable, temporal, cierta e inmediata, de cinco términos anuales variables en progresión aritmética de razón $d = 2$, siendo el primer término de cuantía $C_1 = 1$.

3. Dibujar el gráfico de una renta de cuatro términos variables en progresión geométrica de razón $q = 2$, cuyo tercer término es de cuantía 8 €, prepagable y diferida tres períodos.

4. En la renta anterior, señalar: el origen, el final, la duración y el punto en el que se calcula el valor actual y el valor final.

© Ediciones Pirámide

5. Señalar en la siguiente renta prepagable el punto en el que está situado el origen, el final y cuál es la duración. Además, clasificar la renta si su valor actual se calcula en 0 y su valor final en 10.



6. Determinar el valor financiero en 12 de la siguiente renta: {(100,1), (300,4), (500,7), (200,10)}, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}04(p - t)$, $p = 15$.

7. El valor financiero en 6 de la siguiente renta es 930,56: {(300,0), (75,3), (125,4), (X, 7)}. Determinar el valor de X, siendo la ley de valoración $L(t; p) = 1 + 0{,}20(p - t)$, $p = 10$.

© Ediciones Pirámide

6 Valoración de rentas financieras (I)

OBJETIVOS

- Estudiar las relaciones generales, en capitalización compuesta, entre el valor actual y el valor final de las rentas inmediatas temporales tanto pospagables como prepagables.
- Relacionar los valores de las rentas pospagables con los correspondientes de las prepagables.
- Determinar las expresiones que nos permiten calcular el valor actual y el valor final de las rentas constantes inmediatas.
- Obtener el valor de las rentas constantes diferidas y anticipadas a partir de las expresiones generales obtenidas para las rentas constantes inmediatas.

SUMARIO

6.1. Valoración de las rentas inmediatas temporales.
6.2. Valoración de las rentas constantes inmediatas.
6.3. Valoración de las rentas constantes diferidas.
6.4. Valoración de las rentas constantes anticipadas.
6.5. Ejercicios y problemas resueltos.
6.6. Ejercicios y problemas propuestos.

6.1. VALORACIÓN DE LAS RENTAS INMEDIATAS TEMPORALES

Tal y como señalamos en la lección anterior, el valor financiero de una renta se puede calcular en cualquier momento del tiempo, recibiendo un nombre particular cuando se calcula en el origen o antes del mismo (valor actual), o bien en el final de la renta o después del mismo (valor final).

Vamos a determinar las expresiones que nos permitirán obtener el valor actual y el valor final de las rentas inmediatas temporales, utilizando la ley de capitalización compuesta con tipo de interés constante, para a partir de ellas valorar los restantes tipos de rentas.

Recordemos que, en las rentas inmediatas, el valor actual o inicial se calcula en el origen o extremo inferior del subintervalo en el que vence el primer capital, y el valor final en el final de la renta o extremo superior del subintervalo en el que vence el último término de la misma.

6.1.1. Renta temporal, inmediata y pospagable

Gráficamente, podemos representarla como:

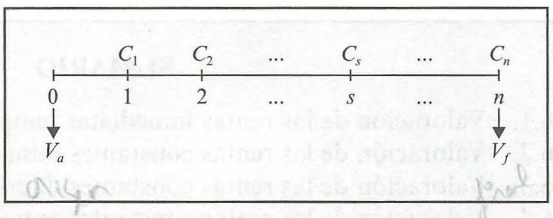


Figura 6.1.

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta el concepto de valor financiero, el valor actual verifica:

$$(V_a, 0) = (C_1, 1) + (C_2, 2) + \ldots + (C_n, n)$$

$$V_a = V_0 = C_1(1 + i)^{-1} + C_2(1 + i)^{-2} + \ldots + C_n(1 + i)^{-n}$$

$$V_a = V_0 = \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{-s}$$

Del mismo modo, podemos obtener el valor final como:

$$(V_f, n) = (C_1, 1) + (C_2, 2) + \ldots + (C_n, n)$$

$$V_f = V_n = C_1(1 + i)^{n-1} + C_2(1 + i)^{n-2} + \ldots + C_{n-1}(1 + i)^1 + C_n$$

$$V_f = V_n = \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{n-s}$$

Si comparamos la expresión obtenida del valor actual con la del valor final, se verifica:

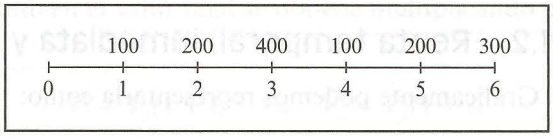
$$V_f \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{n-s} = (1 + i)^n \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{-s} = V_a(1 + i)^n$$

Por lo que podemos señalar que, en las rentas temporales inmediatas y pospagables, el valor final se obtiene multiplicando el valor actual por $(1 + i)^n$. Es decir:

$$V_f = V_a = (1 + i)^n \quad \Leftrightarrow \quad V_a = V_f(1 + i)^{-n}$$

EJERCICIO 6.1

Calcular el valor actual y el valor final de la siguiente renta temporal, inmediata, pospagable, valorada al 10% anual:



Resolución

El valor en 0 verifica:

$$V_0 = 100(1{,}10)^{-1} + 200(1{,}10)^{-2} + 400(1{,}10)^{-3} +$$
$$+ 100(1{,}10)^{-4} + 200(1{,}10)^{-5} + 300(1{,}10)^{-6} = 918{,}55$$

© Ediciones Pirámide

El valor final o en 6 verifica:

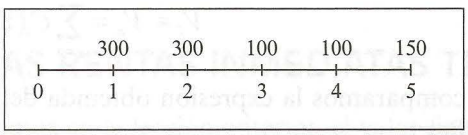
$$V_6 = 100(1{,}10)^5 + 200(1{,}10)^4 + 400(1{,}10)^3 + 100(1{,}10)^2 + \\ + 200(1{,}10) + 300 = 1.627{,}27$$

También podemos obtener el valor final con la siguiente expresión:

$$V_6 = V_0(1 + i)^6 \Rightarrow V_6 = 918{,}55(1 + 0{,}10)^6 = 1.627{,}27$$

EJERCICIO 6.2

Calcular el valor actual, el valor final y el valor en 3 de la siguiente renta temporal, inmediata, pospagable, valorada al 5% anual:



Resolución

El valor actual o en 0 verifica:

$$V_0 = V_a = 300(1{,}05)^{-1} + 300(1{,}05)^{-2} + 100(1{,}05)^{-3} + 100(1{,}05)^{-4} + \\ + 150(1{,}05)^{-5} = 844{,}01$$

El valor final o valor en 5 es: $V_5 = 844{,}01 \times 1{,}05^5 = 1.077{,}19$.

Para calcular el valor en 3 podemos capitalizar 3 períodos el valor actual, o actualizar 2 períodos el valor final:

$$V_3 = V_0 \times 1{,}05^3 = V_5 \times 1{,}05^{-2} = 977{,}04$$

6.1.2. Renta temporal, inmediata y prepagable

Gráficamente podemos representarla como:

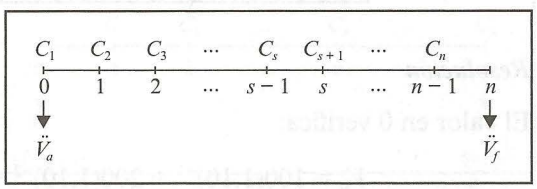


Figura 6.2.

© Ediciones Pirámide

El valor actual verifica:

$$(\ddot{V}_a, 0) = (C_1, 0) + (C_2, 1) + \ldots + (C_n, n-1)$$

$$\ddot{V}_a = \ddot{V}_0 = C_1 + C_2(1+i)^{-1} + C_3(1+i)^{-2} + \ldots + C_n(1+i)^{-(n-1)}$$

$$\ddot{V}_a = \ddot{V}_0 = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-(s-1)} = (1+i)\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$$

Teniendo en cuenta la expresión obtenida al calcular el valor actual de la renta inmediata, temporal, pospagable, $V_a = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$, y relacionándolo con el de la prepagable, se verifica:

$$\ddot{V}_a = (1+i)\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = (1+i) \times V_a$$

En definitiva, para cualquier renta inmediata y temporal, el valor actual de la renta prepagable se obtiene multiplicando el valor actual de la pospagable por el factor unitario de capitalización $(1+i)$. Es decir, $\ddot{V}_a = (1+i) \times V_a$.

De manera análoga, podemos obtener el valor final de la renta inmediata, temporal, prepagable como:

$$(\ddot{V}_f, n) = (C_1, 0) + (C_2, 1) + \ldots + (C_n, n-1)$$

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_n = C_1(1+i)^n + C_2(1+i)^{n-1} + \ldots + C_n(1+i)$$

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_n = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{n-(s-1)} = (1+i)^n \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-(s-1)}$$

Si comparamos esta expresión con la obtenida del valor actual, tenemos que:

$$\ddot{V}_f = (1+i)^n \times \ddot{V}_a$$

En consecuencia, podemos señalar que en las rentas temporales, inmediatas y prepagables, también el valor final se obtiene multiplicando el valor actual por $(1+i)^n$. Es decir:

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1+i)^n \quad \Leftrightarrow \quad \ddot{V}_a = \ddot{V}_f(1+i)^{-n}$$

Podemos comparar también la expresión obtenida al calcular el valor final de una renta inmediata, temporal y prepagable, con la obtenida para la renta de la misma naturaleza pero pospagable, de manera que se verifica:

$$\ddot{V}_f = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{n-(s-1)} = (1+i)\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{(n-s)} \quad \Rightarrow \quad \ddot{V}_f = V_f(1+i)$$

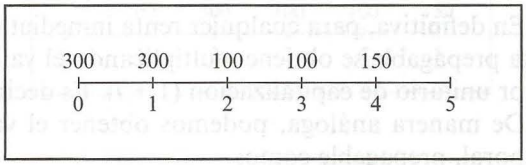
© Ediciones Pirámide

En conclusión, en las rentas inmediatas temporales se verifica que el valor de la prepagable es igual al de la pospagable multiplicado por $(1 + i)$, tanto para el valor actual como para el valor final. Y además, tanto en las rentas pospagables como en las prepagables el valor final se obtiene al capitalizar n períodos el valor actual:

$$\ddot{V}_a = V_a(1 + i);\ \ddot{V}_f = V_f(1 + i);\ V_f = V_a(1 + i)^n;\ \ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1 + i)^n$$

EJERCICIO 6.3

Calcular el valor actual, el valor final y el valor en 3 de la siguiente renta temporal, inmediata, prepagable, valorada al 5% anual:



Resolución

El valor actual en 0 verifica:

$$\ddot{V}_0 = \ddot{V}_a = 300 + 300(1{,}05)^{-1} + 100(1{,}05)^{-2} + 100(1{,}05)^{-3} + 150(1{,}05)^{-4} = 886{,}21$$

El valor final o valor en 5 es: $\ddot{V}_5 = 886{,}21 \times 1{,}05^5 = 1.131{,}05$.

También podemos determinar estos valores calculándolos a través de la relación entre los de la renta prepagable y los de la pospagable. Así, teniendo en cuenta que los valores de la pospagable, calculados en el ejercicio 6.2, son: $V_0 =$ $= 844{,}01$; $V_5 = 1.077{,}19$, tenemos:

$$\ddot{V}_0 = V_0(1 + i) \Rightarrow \ddot{V}_0 = 844{,}01 \times 1{,}05 = 866{,}21$$

$$\ddot{V}_f = V_f(1 + i) \Rightarrow \ddot{V}_5 = 1.077{,}19 \times 1{,}05 = 1.131{,}05$$

Para calcular el valor en 3 podemos capitalizar 3 períodos el valor actual, o actualizar 2 períodos el valor final:

$$\ddot{V}_3 = \ddot{V}_0 \times 1{,}05^3 = \ddot{V}_5 \times 1{,}05^{-2} = 1.025{,}90$$

© Ediciones Pirámide

6.2. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONSTANTES INMEDIATAS

Atendiendo a la clasificación expuesta en la lección anterior, las rentas constantes inmediatas en función del número de términos que las constituyen, finito o infinito, pueden ser temporales o perpetuas, y a su vez cada una de ellas pospagable o prepagable, según cuando venzan sus términos. A continuación vamos a plantear el cálculo del valor actual y, en su caso, el del valor final de las rentas constantes, inmediatas, distinguiendo si son temporales o perpetuas, y si son pospagables o prepagables.

6.2.1. Renta constante, inmediata, temporal y pospagable

El esquema gráfico de esta renta es el siguiente:

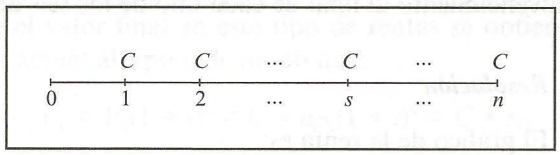


Figura 6.3.

A) **Valor actual.** El valor actual se obtiene como suma del valor en 0 de cada uno de los términos:

$$V_a = V_0 = C(1 + i)^{-1} + C(1 + i)^{-2} + ... + C(1 + i)^{-n}$$

Este valor actual es la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$. Hay que recordar que la suma de los términos de una progresión geométrica de razón r se obtiene a través de la expresión $S = a_1 + a_2 + ... a_n = = \frac{a_1 - a_n \times r}{1 - r}$, por lo que al sustituir se tiene:

$$V_0 = \frac{C(1 + i)^{-1} - C(1 + i)^{-n}(1 + i)^{-1}}{1 - (1 + i)^{-1}}$$

Y al realizar operaciones, llegamos a:

$$V_0 = C\frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

© Ediciones Pirámide

Si en la expresión anterior tomamos $C = 1$, obtenemos el valor actual de una renta inmediata, temporal, unitaria, pospagable, de n términos, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $a_{\overline{n}|i}$, siendo:

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i}$$

El valor actual de una renta de cuantía C se obtiene al multiplicar el valor actual de la renta unitaria por la cuantía del término:

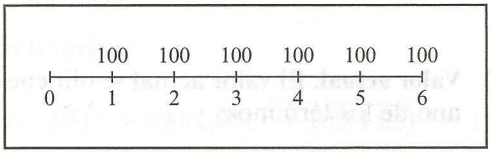
$$V_0 = C \times a_{\overline{n}|i}$$

EJERCICIO 6.4

Calcular el valor actual, al 5% anual, de una renta inmediata de cuantía 100 € con vencimiento al final de cada uno de los seis años de duración.

Resolución

El gráfico de la renta es:



El valor actual verifica: $V_0 = 100 \times a_{\overline{6}|0,05} = 507{,}57$ €.

B) **Valor final.** El valor final se obtiene como suma del valor n de cada uno de los términos:

$$V_f = V_n = C(1 + i)^{n-1} + C(1 + i)^{n-2} + \ldots + C(1 + i)^{-1} + C$$

Se trata de la suma de los términos de una progresión geométrica de razón $(1 + i)^{-1}$. Al sustituir se tiene:

$$V_n = \frac{C(1 + i)^{n-1} - C(1 + i)^{-1}}{1 - (1 + i)^{-1}}$$

© Ediciones Pirámide

Y al realizar operaciones, obtenemos:

$$V_n = C\frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

Si en la expresión anterior hacemos $C = 1$, obtenemos el valor final de una renta temporal, unitaria, pospagable, de n términos y valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $s_{\overline{n}|i}$, siendo:

$$s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

El valor final de una renta de cuantía C se obtiene al multiplicar el valor final de la renta unitaria por la cuantía del término:

$$V_n = C \times s_{\overline{n}|i}$$

También podemos llegar a la expresión anterior teniendo en cuenta que hemos demostrado que el valor final en este tipo de rentas se obtiene capitalizando n períodos el valor actual al tipo i, de modo que:

$$V_n = V_0(1+i)^n = C \times a_{\overline{n}|i}(1+i)^n = C \times s_{\overline{n}|i}$$

Por tanto, para la renta unitaria se verifica:

$$s_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i)^n$$

EJERCICIO 6.5

Calcular el valor final, al 5% anual, de una renta inmediata de cuantía 100 euros con vencimiento al final de cada uno de los seis años de duración.

Resolución

El valor final verifica: $V_6 = 100 \times s_{\overline{6}|0,05} = 680,19$. Teniendo en cuenta que el valor actual es: $V_0 = 100 \times a_{\overline{6}|0,05} = 507,57$, también se verifica: $V_6 = 507,57 \times 1,05^6 = 680,19$ €.

EJERCICIO 6.6

Calcular el valor final de una renta inmediata de diez años de duración, siendo la cuantía de cada término pospagable 50 euros y el tipo de interés el 3% anual.

Resolución

El valor final es: $V_{10} = 50 \times s_{\overline{10}|0,03} = 573,19$ euros.

© Ediciones Pirámide

6.2.2. Renta constante, inmediata, temporal y prepagable

El esquema gráfico de dicha renta es el siguiente:

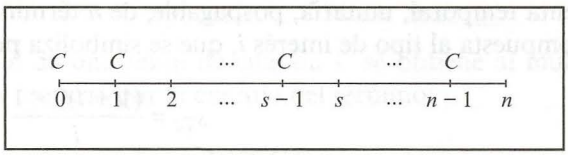


Figura 6.4.

Para valorar este tipo de rentas, vamos a tener en cuenta las expresiones ya deducidas que relacionan las rentas pospagables con las prepagables, así como el valor actual con el valor final:

$$\ddot{V}_a = V_a(1 + i);\ \ddot{V}_f = V_f(1 + i);\ V_f = V_a(1 + i)^n;\ \ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1 + i)^n$$

A) Valor actual

Teniendo en cuenta las relaciones anteriores y el valor actual de la pospagable, se verifica:

$$\ddot{V}_0 = C \times a_{\overline{n}|i}(1 + i)$$

La expresión $a_{\overline{n}|i}(1 + i)$ es el valor actual de una renta inmediata, temporal, unitaria, prepagable, de n términos, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $\ddot{a}_{\overline{n}|i}$. En consecuencia:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1 + i)$$

Y por tanto:

$$\ddot{V}_0 = C \times \ddot{a}_{\overline{n}|i}$$

Ejercicio 6.7

Calcular el valor actual de una renta inmediata prepagable de 25 euros durante ocho años, siendo el tipo de interés el 7% anual.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El valor actual verifica: $\ddot{V}_0 = 25 \times \ddot{a}_{\overline{8}|0,07} = 25 \times a_{\overline{8}|0,07} \times 1,07 = 159,73$ €.

Otra forma de obtener el valor actual de la renta unitaria prepagable es descomponiendo la misma en dos rentas. Para ello partimos del gráfico de la renta unitaria prepagable:

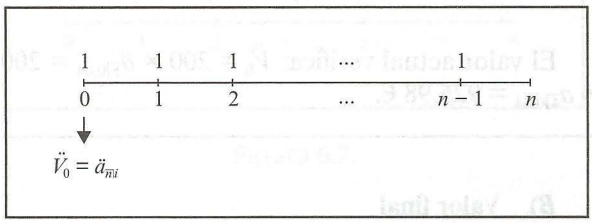


Figura 6.5.

La renta anterior se descompone en las dos rentas siguientes: una de una sola cuantía con vencimiento en 0, y otra de $(n - 1)$ términos pospagables. Gráficamente:

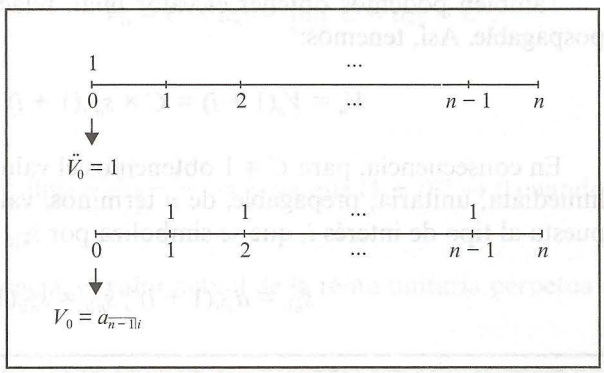


Figura 6.6.

Tenemos, pues, que la renta unitaria prepagable es equivalente a la suma de las dos rentas anteriores, por lo que se verifica: $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + a_{\overline{n-1}|i}$.

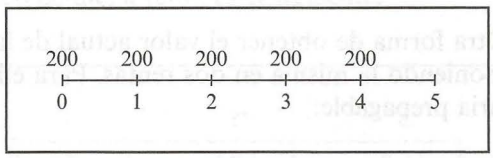
Ejercicio 6.8

Calcular el valor actual, al 4% anual, de una renta inmediata de cuantía 200 €, con vencimiento al principio de cada uno de los cinco años de duración.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El gráfico de la renta es:



El valor actual verifica: $\ddot{V}_0 = 200 \times \ddot{a}_{\overline{5}|0,04} = 200 \times a_{\overline{5}|0,04} \times 1,04 = 200 + 200 \times$ $\times a_{\overline{4}|0,04} = 925,98$ €.

B) **Valor final**

Teniendo en cuenta que el valor final o valor en n se obtiene a partir del valor actual capitalizándolo durante n períodos al tipo i, tenemos:

$$\ddot{V}_n = \ddot{V}_0(1 + i)^n = C \times \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1 + i)^n = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

También podemos obtener el valor final, relacionándolo con el de la renta pospagable. Así, tenemos:

$$\ddot{V}_n = V_n(1 + i) = C \times s_{\overline{n}|i}(1 + i) = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

En consecuencia, para $C = 1$ obtenemos el valor final de una renta temporal, inmediata, unitaria, prepagable, de n términos, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i, que se simboliza por $\ddot{s}_{\overline{n}|i}$, verificándose:

$$\ddot{s}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1 + i)^n; \ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1 + i)$$

Ejercicio 6.9

Calcular el valor final, al 8% anual, de una renta inmediata de cuantía 6 euros, con vencimiento al principio de cada uno de los 10 años de duración.

Resolución

El valor final verifica:

$$\ddot{V}_{10} = 6 \times \ddot{s}_{\overline{10}|0,08} = 6 \times s_{\overline{10}|0,08} \times 1,08 = 93,87 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

6.2.3. Renta constante, inmediata, perpetua y pospagable

El esquema gráfico de dicha renta es el siguiente:

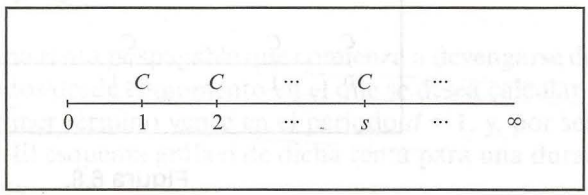


Figura 6.7.

En las rentas perpetuas, al tener duración infinita, no tiene sentido el cálculo del valor final, pues el punto final de las mismas no existe.

Al ser la duración infinita, calculamos el valor actual de la renta perpetua como el límite del valor actual de la renta temporal cuando n tiende a infinito:

$$V_0 = C \times a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n \to \infty} C \times a_{\overline{n}|i} = C\frac{1}{i}$$

puesto que:

$$\lim_{n \to \infty} a_{\overline{n}|i} = \lim_{n \to \infty} \frac{1 - (1 + i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i}, \text{ ya que } (1 + i)^{-n} \to 0 \text{ cuando } n \to \infty$$

En consecuencia, el valor actual de la renta unitaria perpetua es $a_{\overline{\infty}|i} = \frac{1}{i}$.

EJERCICIO 6.10

Un inversor va a recibir de forma indefinida y al final de cada año una cuantía de 300 euros. Calcular su valor actual al 5% de interés anual.

Resolución

De acuerdo con la fórmula deducida, tenemos: $V_0 = 300\frac{1}{0{,}05} = 6.000$ euros.

© Ediciones Pirámide

6.2.4. Renta constante, inmediata, perpetua y prepagable

El esquema gráfico de dicha renta es el siguiente:

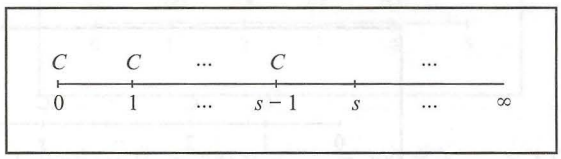


Figura 6.8.

Teniendo en cuenta la relación entre el valor actual de la renta prepagable y el de la pospagable, se verifica:

$$\ddot{V}_0 = V_0(1+i) \Rightarrow \ddot{V}_0 = C\frac{(1+i)}{i}$$

Por tanto, el valor actual de la renta unitaria prepagable perpetua es:

$$\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i}(1+i) = \frac{1+i}{i}$$

Ejercicio 6.11

Un inversor realiza cierta inversión por la que va a recibir de forma indefinida y al principio de cada año una cuantía de 300 euros. Calcular la cuantía invertida para un 5% de interés anual.

Resolución

El valor actual de la renta citada nos da la cuantía invertida: $\ddot{V}_0 = 300\frac{(1+0{,}05)}{0{,}05} =$ = 6.300 €.

6.3. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONSTANTES DIFERIDAS

Una renta es diferida con respecto a un determinado punto en el que se desea calcular su valor actual, si comienza a devengarse una vez transcurridos *d* períodos desde dicho punto. Por tanto, su origen se encuentra *d* períodos a la derecha

© Ediciones Pirámide

del punto de valoración, por lo que su valor actual se determina d períodos antes del origen. El diferimiento sólo tiene sentido en cuanto al cálculo del valor inicial.

6.3.1. Renta constante, diferida, temporal y pospagable

Se trata de una renta pospagable que comienza a devengarse después de transcurridos d períodos desde el momento en el que se desea calcular su valor actual. Por tanto, su primer término vence en el período $d + 1$, y, por ser pospagable, al final del mismo. El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos es el siguiente:

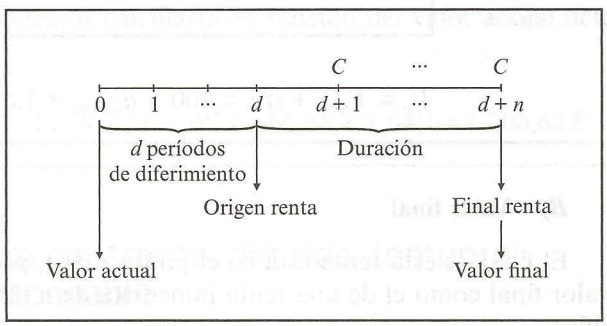


Figura 6.9.

A) Valor actual

El valor actual se obtiene como la suma del valor en 0 de cada uno de los términos. Para ello, podemos valorar todos los términos en el punto d, con lo que consideramos la renta como inmediata pospagable, y a continuación actualizamos d períodos hasta el punto 0. Por tanto:

$$V_0 = V_d(1 + i)^{-d} = C \times a_{\overline{n}|i}(1 + i)^{-d}$$

Cuando $C = 1$, tenemos la renta unitaria, cuyo valor es: $d|a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1 + i)^{-d}$.

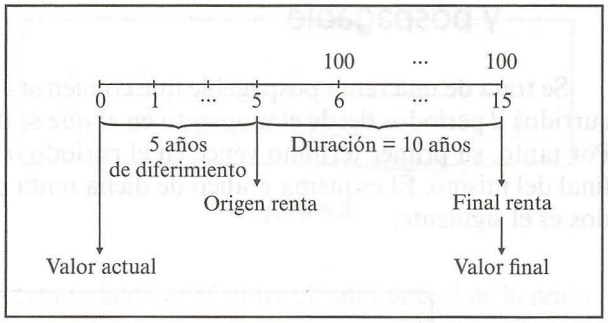
EJERCICIO 6.12

Calcular el valor actual, al 4% anual, de una renta pospagable de cuantía 100 euros que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

© Ediciones Pirámide

Resolución

La renta está diferida en 5 años, por lo que el primer término vence en el año 6, y por ser pospagable al final del mismo. Gráficamente, tenemos:



$$V_0 = V_5(1+i)^{-5} = 100 \times a_{\overline{10}|0,04} \times 1{,}04^{-5} = 666{,}66\ €$$

B) Valor final

El final de esta renta está en el punto $d + n$, por lo que podemos calcular el valor final como el de una renta inmediata de n términos, de manera que se verifica:

$$V_f = V_{d+n} = C \times s_{\overline{n}|i}$$

También podemos calcular este valor relacionándolo con el valor actual, de modo que el valor final se obtiene al capitalizar el valor actual $d + n$ períodos:

$$V_f = V_a(1+i)^{d+n}$$

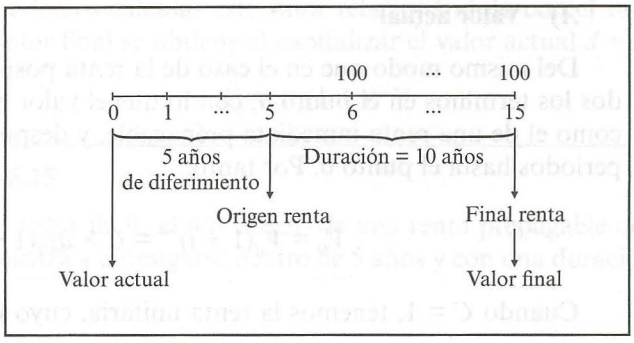
EJERCICIO 6.13

Calcular el valor final, al 4% anual, de una renta pospagable de cuantía 100 euros que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

Resolución

La renta está diferida 5 años, por lo que el primer término vence al final del año 6, y gráficamente tenemos:

© Ediciones Pirámide



$$V_f = V_{15} = 100 \times s_{\overline{10}|0,04} = 1.200,62 \text{ €}$$

También podemos calcularlo en función del valor actual determinado anteriormente:

$$V_{15} = V_0(1 + i)^{15} = 666,66 \times 1,04^{15} = 1.200,62 \text{ €}$$

6.3.2. Renta constante, diferida, temporal y prepagable

Se trata de una renta prepagable que comienza a devengarse después de transcurridos d períodos desde el momento en el que se desea calcular su valor actual. Por tanto, su primer término vence en el período $d + 1$, y, por ser prepagable, al principio del mismo. El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos es el siguiente:

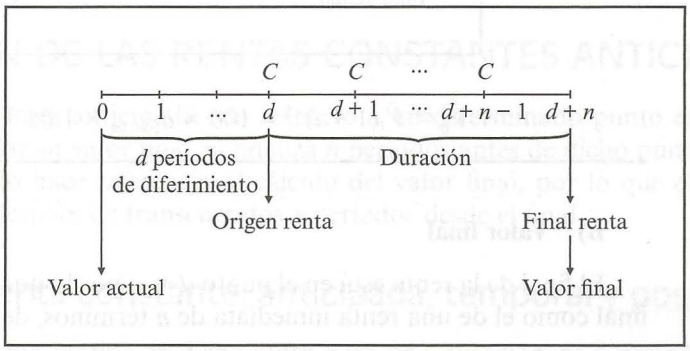


Figura 6.10.

© Ediciones Pirámide

A) Valor actual

Del mismo modo que en el caso de la renta pospagable, podemos valorar todos los términos en el punto d, con lo que el valor en dicho punto se determina como el de una renta inmediata prepagable, y después actualizamos este valor d períodos hasta el punto 0. Por tanto:

$$\ddot{V}_0 = \ddot{V}_d(1+i)^{-d} = C \times \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d}$$

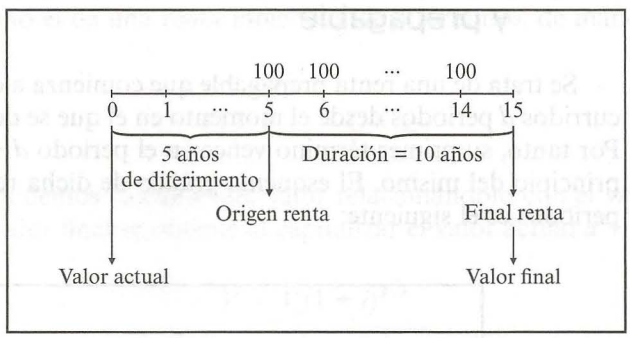
Cuando $C = 1$, tenemos la renta unitaria, cuyo valor es: $d|\ddot{a}_{\overline{n}|i} = \ddot{a}_{\overline{n}|i}(1+i)^{-d}$.

EJERCICIO 6.14

Calcular el valor actual, al 4 % anual, de una renta prepagable de cuantía 100 € que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

Resolución

La renta está diferida en 5 años, por lo que el primer término se devenga en el año 6, y, por ser prepagable, vence al inicio del mismo. Gráficamente, tenemos:



$$\ddot{V}_0 = \ddot{V}_5(1+i)^{-5} = 100 \times \ddot{a}_{\overline{10}|0,04} \times 1{,}04^{-5} = 693{,}32\ €$$

B) Valor final

El final de la renta está en el punto $d + n$, por lo que podemos calcular el valor final como el de una renta inmediata de n términos, de manera que se verifica:

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_{d+n} = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$$

© Ediciones Pirámide

También podemos calcular este valor relacionándolo con el valor actual, de modo que el valor final se obtiene al capitalizar el valor actual $d + n$ períodos:

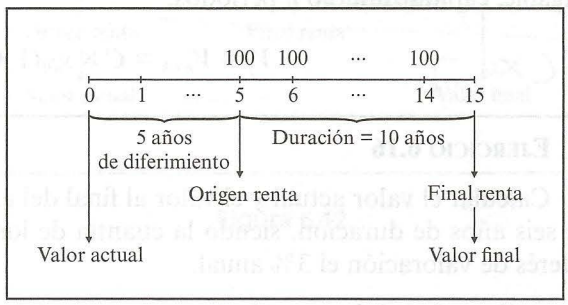
$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_a(1 + i)^{d+n}$$

EJERCICIO 6.15

Calcular el valor final, al 4% anual, de una renta prepagable de cuantía 100 euros, que comienza a devengarse dentro de 5 años y con una duración de 10 años.

Resolución

La renta está diferida en 5 años, por lo que al ser prepagable, el primer término vence al principio del año 6. Gráficamente, tenemos:



$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_{15} = 100 \times \ddot{s}_{\overline{10}|0,04} = 1.248,63\ €$$

También lo podemos calcular en función del valor actual determinado anteriormente:

$$\ddot{V}_{15} = \ddot{V}_0(1 + i)^{15} = 693,32 \times 1,04^{15} = 1.248,63\ €$$

6.4. VALORACIÓN DE LAS RENTAS CONSTANTES ANTICIPADAS

Una renta es anticipada con respecto a un determinado punto en el que se desea calcular su valor final, si finaliza h períodos antes de dicho punto. La anticipación sólo hace referencia al cálculo del valor final, por lo que el mismo se determina después de transcurridos h períodos desde el final.

6.4.1. Renta constante, anticipada, temporal y pospagable

El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

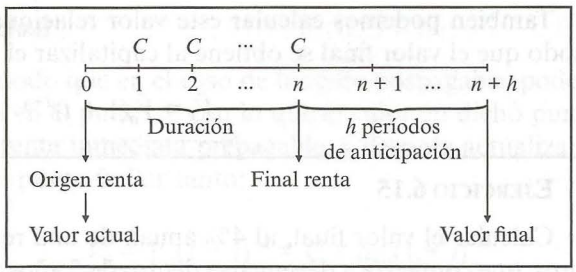


Figura 6.11.

El valor actual de esta renta coincide con el de la inmediata pospagable, mientras que el valor final se obtiene a partir del valor final de la renta inmediata pospagable, capitalizándolo h períodos:

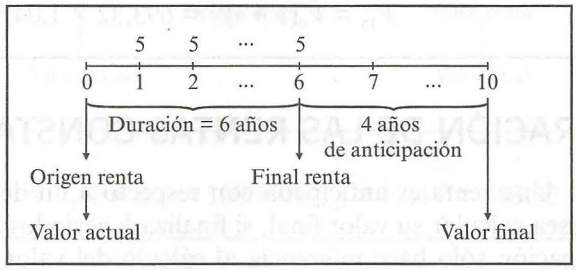
$$V_f = V_{n+h} = C \times s_{\overline{n}|i}(1+i)^h$$

EJERCICIO 6.16

Calcular el valor actual y el valor al final del año 10 de una renta pospagable de seis años de duración, siendo la cuantía de los términos 5 euros y el tipo de interés de valoración el 3% anual.

Resolución

La renta tiene una duración de 6 años y nos piden que calculemos el valor al final del año 10, por lo que la renta está anticipada en 4 años. Gráficamente, tenemos:



$$V_0 = 5 \times a_{\overline{6}|0,03} = 27{,}09\ €$$

$$V_{10} = 5 \times s_{\overline{6}|0,03} \times 1{,}03^4 = 36{,}40\ €, \text{ o también } V_{10} = V_0(1+i)^{10} =$$
$$= 27{,}09 \times 1{,}03^{10} = 36{,}40\ €.$$

© Ediciones Pirámide

6.4.2. Renta constante, anticipada, temporal y prepagable

El esquema gráfico de dicha renta para una duración de n períodos, es el siguiente:

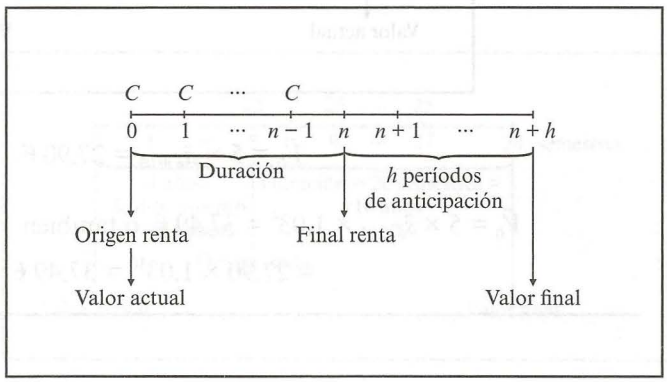


Figura 6.12.

El valor actual de esta renta coincide con el de la inmediata prepagable, obteniéndose el valor final a partir del valor final de la renta inmediata prepagable, capitalizándolo h períodos:

$$\ddot{V}_f = \ddot{V}_{n+h} = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}(1+i)^h$$

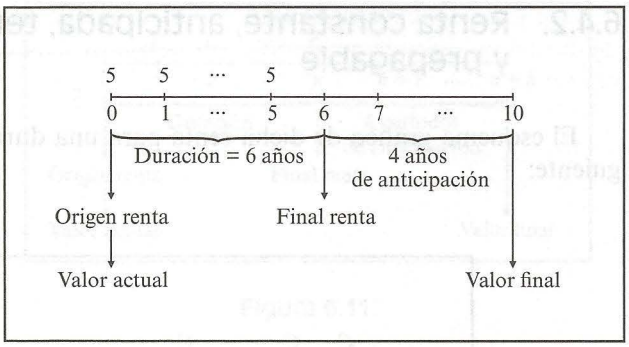
EJERCICIO 6.17

Calcular el valor actual y el valor al final del año 10 de una renta prepagable de seis años de duración, siendo la cuantía de los términos 5 € y el tipo de interés de valoración el 3% anual.

Resolución

La renta tiene una duración de 6 años, y al ser prepagable el primer término vence al principio del primer año y el último al principio del año 6. Como nos piden que calculemos el valor al final del año 10, la renta está anticipada en 4 años. Gráficamente, tenemos:

© Ediciones Pirámide



$$\ddot{V}_0 = 5 \times \ddot{a}_{\overline{6}|0,03} = 27{,}90\ €$$

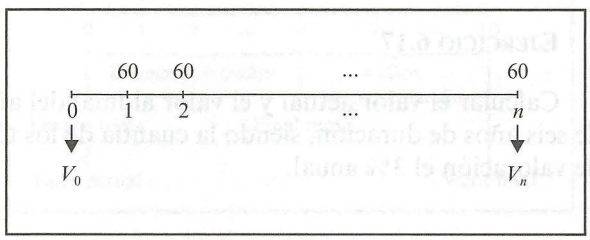
$$\ddot{V}_0 = 5 \times \ddot{s}_{\overline{6}|0,03} \times 1{,}03^4 = 37{,}49\ €, \text{ o también } \ddot{V}_{10} = \ddot{V}_0(1+i)^{10} =$$
$$= 27{,}90 \times 1{,}03^{10} = 37{,}49\ €$$

6.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el valor final de una renta constante inmediata de términos anuales pospagables de cuantía 60 €, cuyo valor actual es 981,09 €, valorada al 2% de interés anual.

Resolución

De acuerdo con el enunciado, el gráfico de la renta es el siguiente:



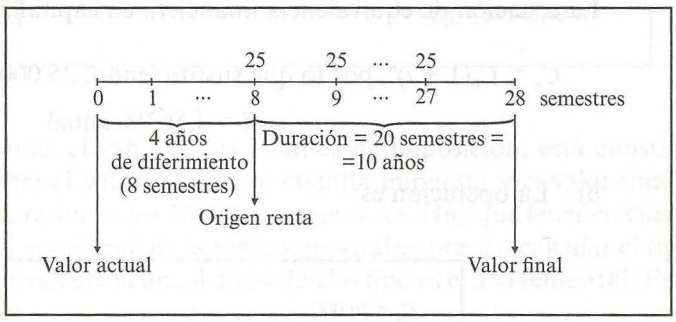
Para determinar el valor final es preciso conocer el número de términos, el cual podemos obtener a partir del valor actual: $V_0 = C \times a_{\overline{n}|i}$, por lo que al sustituir se llega a: $V_0 = 981{,}09 = 60 \times a_{\overline{n}|0,02} \Rightarrow n = 20$. En consecuencia, el valor final es: $V_n =$ $= 981{,}09 \times \times 1{,}02^{20} = 60 \times s_{\overline{20}|0,02} = 1.457{,}85$ €.

© Ediciones Pirámide

2. Calcular el valor actual y el valor final de una renta prepagable de 10 años de duración, diferida en 4 años, con términos semestrales de cuantía 25 €, siendo el tipo de valoración el 6,09% anual.

Resolución

De acuerdo con el enunciado, tenemos que calcular el valor en 0 de la siguiente renta:



Por tanto, tenemos una renta semestral prepagable diferida, cuyo valor actual calcularemos como el valor actual de una renta inmediata de 20 términos prepagables semestrales trasladado ocho semestres o cuatro años a la izquierda. Al ser la renta de periodicidad semestral, es preciso disponer del tipo de interés semestral equivalente al 6,09% anual, que se obtiene de la ecuación: $1{,}0609 = (1 + i^{(m)})^2 \Rightarrow i^{(m)} = 0{,}03$.

El valor actual verifica:

$$\ddot{V}_0 = 25 \times \ddot{a}_{\overline{20}|0{,}03}(1{,}03)^{-8} = 25 \times \ddot{a}_{\overline{20}|0{,}03}(1{,}0609)^{-4} = 302{,}42\ €$$

El valor final es: $\ddot{V}_f = \ddot{V}_{28} = 25 \times \ddot{s}_{\overline{20}|0{,}03} = 302{,}42 \times 1{,}03^{28} = 302{,}42 \times 1{,}0609^{14} =$ $= 691{,}92$ €.

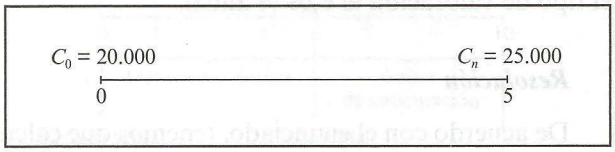
3. Un inversor realiza un depósito de 20.000 €, a 5 años, en una entidad financiera. Dicha entidad le propone dos alternativas de devolución: *a*) un pago de 25.000 € al cabo de los 5 años, y *b*) cinco pagos anuales constantes de 4.700 € al final de cada uno de los cinco años de duración de la operación. Determinar la alternativa más rentable para el inversor.

Resolución

Para comparar ambas alternativas plantearemos la ecuación de equivalencia entre los conjuntos prestación y contraprestación de cada una de ellas. La que mayor tipo de interés ofrezca, será la más rentable para el inversor.

© Ediciones Pirámide

a) En este caso nos encontramos con la siguiente operación:

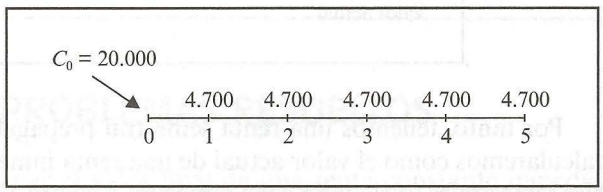


La ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta verifica:

$$C_n = C_0(1 + i)^n, \text{ por lo que sustituyendo: } 25.000 = 20.000(1 + i)^5 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow i = 4{,}563\% \text{ anual}$$

b) La operación es:



Para calcular la rentabilidad planteamos la ecuación de equivalencia financiera en capitalización compuesta, de modo que se verifica:

$$20.000 = 4.700 \times a_{\overline{5}|i} \Rightarrow i = 5{,}628\% \text{ anual}$$

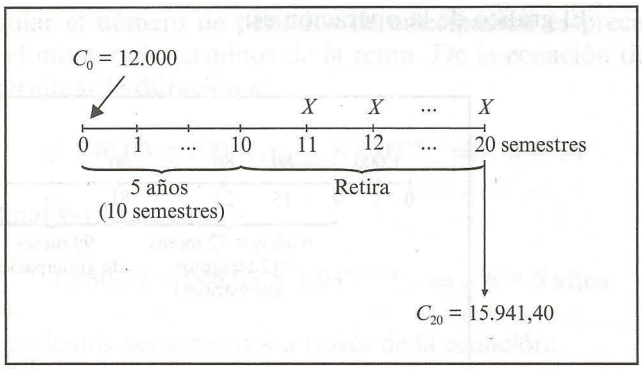
Por tanto, le interesa más la alternativa *b*), ya que es la de mayor tipo de interés.

4. Una persona impone en cierta entidad financiera un capital de 12.000 € a un tipo de interés del 6,09 % anual en capitalización compuesta durante 10 años. Con el fin de atender a diversos gastos, al final de cada semestre de los últimos cinco años retira una cuantía constante X. Sabiendo que al final del año 10, tras retirar la correspondiente cuantía X, el montante que queda en la entidad financiera es de 15.941,40 €, calcular la cuantía X.

Resolución

Conocemos el saldo al final de la operación, por lo que a partir del mismo podemos determinar la cuantía constante X que retira semestralmente en los últimos cinco años. Gráficamente, tenemos:

© Ediciones Pirámide



El montante, al cabo de los 10 años de imposición, está constituido por la diferencia entre el valor final de la cuantía impuesta y el valor final de la renta semestral que retira en los 10 últimos semestres. Hay que tener en cuenta que para determinar el valor final de la renta semestral es preciso calcular el tipo de interés semestral equivalente al anual dado. Dicho tipo es el 3% semestral. En consecuencia, se verifica:

$$C_{20} = 15.941,40 = 12.000(1 + 0,0609)^{10} - X \times s_{\overline{10}|0,03} \Rightarrow X = 500\ €$$

5. En el momento actual, un sujeto pacta con una entidad financiera la siguiente operación, valorándola al 8,16% anual: depositar un capital de 1.000 € dentro de 7 meses, y una renta pospagable de 80 € semestrales durante 6 años. Sabiendo que el quinto término de la citada renta vence transcurridos 39 meses desde el inicio de la operación, determinar el valor de toda la operación al final del año 15.

Resolución

Para poder calcular el valor solicitado al final del año 15, o sea, concluido el mes 180, hemos de determinar los vencimientos de los términos de la renta semestral, que, al tener una duración es de 6 años, consta de 12 términos. Al ser los términos semestrales, sus vencimientos varían en progresión aritmética de razón 6 meses, por lo que los vencimientos primero y último verifican[1]:

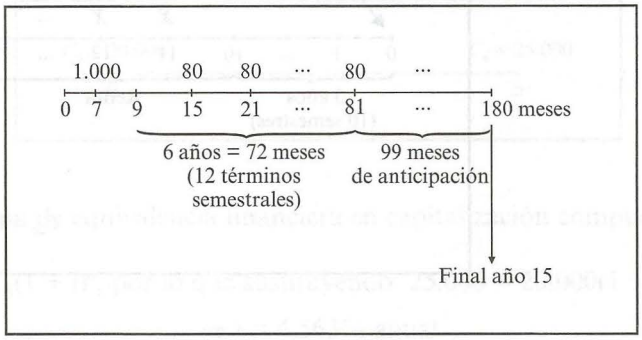
$$t_5 = t_1 + (5 - 1) \times 6 \Rightarrow 39 = t_1 + 24 \Rightarrow t_1 = 15$$

$$t_{12} = t_1 + (12 - 1) \times 6 \Rightarrow t_{12} = 81$$

[1] Recordemos que los términos de una progresión aritmética verifican: $a_n = a_1 + d(n - 1)$.

© Ediciones Pirámide

El gráfico de la operación es:



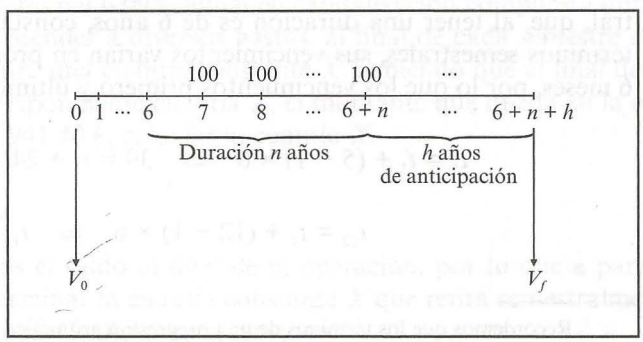
El valor al final del mes 180 de toda la operación es la suma en dicho momento de los 1.000 € impuestos en el mes 7, más el valor final de la renta semestral pospagable, anticipada en 99 meses. Siendo el 4% semestral el tipo de interés equivalente al 8,16% anual, se verifica:

$$V_{180} = 1.000(1 + 0,0816)^{\frac{180-7}{12}} + 80 \times s_{\overline{12}|0,04} \times 1,0816^{\frac{180-81}{12}} = 5.394,36 \text{ €}$$

6. Sea una renta anual pospagable de cuantía 100 € y n términos, diferida en 6 años, valorada al 3% anual y anticipada en h años. Sabemos que su valor actual es 946,03 €, y su valor final asciende a 1.980,77. Calcular el número h de años de anticipación.

Resolución

El gráfico de la operación es:



© Ediciones Pirámide

Para calcular el número de períodos de anticipación es preciso determinar previamente el número de términos de la renta. De la ecuación del valor actual podemos determinar la duración n:

$$946{,}03 = 100 \times a_{\overline{n}|0{,}03} \times 1{,}03^{-6} \quad \Rightarrow \quad n = 14$$

El valor final verifica:

$$1.980{,}77 = 946{,}03 \times 1{,}03^{n+h+6} \quad \Rightarrow \quad h = 5 \text{ años}$$

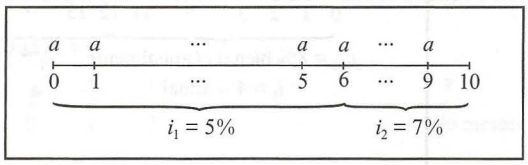
También podemos determinar h a través de la ecuación:

$$1.980{,}77 = 100 \times s_{\overline{14}|0{,}03} \times 1{,}03^{h} \qquad h = 5 \text{ años}$$

7. Una persona tiene derecho a percibir durante 10 años una cuantía de 10.000 € al inicio de cada año. Si en lugar de los capitales anteriores desease recibir una cuantía constante pospagable durante 12 años, determinar dicha cuantía en el supuesto de que el intercambio citado se valore con un tipo de interés del 5% anual durante los primeros 6 años, y del 7% anual para los restantes.

Resolución

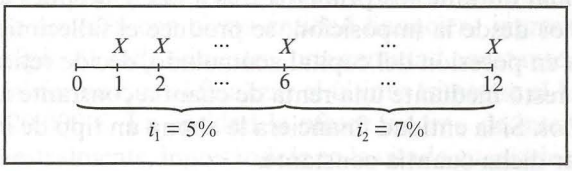
Siendo a = 10.000, podemos representar gráficamente la renta inicial de 10 años:



El valor actual de dicha renta es:

$$V_{0,1} = 10.000 \times \ddot{a}_{\overline{6}|5\%} + 10.000 \times \ddot{a}_{\overline{4}|7\%} \times 1{,}05^{-6} = 80.339{,}97$$

La renta anterior se sustituye por otra renta de 12 años, cuyo valor actual ha de coincidir con el de la renta a la que sustituye. El gráfico de la nueva renta es:



© Ediciones Pirámide

Denominando X a la cuantía del término anual de la nueva renta, su valor actual verifica:

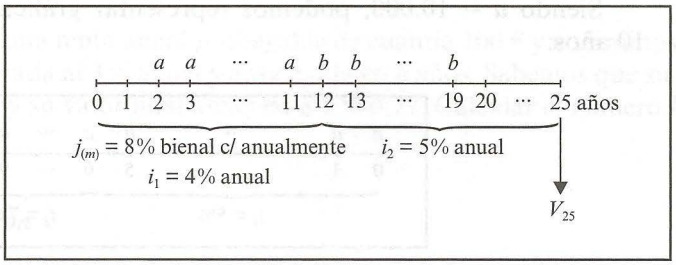
$$V_{0,2} = X \times a_{\overline{6}|5\%} + X \times a_{\overline{6}|7\%} \times 1{,}05^{-6} = 80.339{,}97$$

Al realizar operaciones se obtiene que el término de la segunda renta vale 9.306,62 €.

8. Una empresa deposita en una entidad financiera las siguientes rentas anuales: una prepagable de 10 términos de cuantía 4.000 €, venciendo el primero al inicio del año 3; y otra de 8 términos de cuantía 6.000 €, venciendo el primero al principio del año 13. Calcular el montante disponible dentro de 25 años, siendo el tipo de valoración para los primeros doce años el 8% bienal pagadero anualmente y para el resto de los años el 5% anual.

Resolución

El tipo de interés para los doce primeros años es el 4% anual, deducido del tanto nominal dado del 8% bienal pagadero anualmente. Denotando por a la cuantía anual prepagable de 4.000 € y por b la de 6.000, el gráfico de la operación es el siguiente:



El valor final verifica:

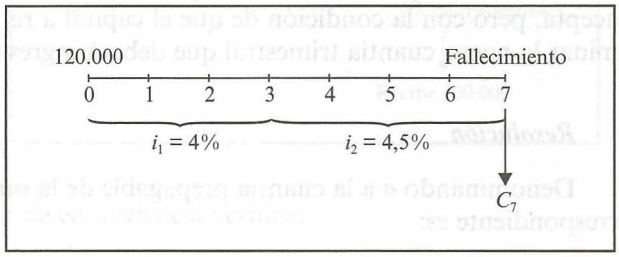
$$V_{25} = 4.000 \times \ddot{s}_{\overline{10}|0,04} \times 1{,}05^{13} + 6.000 \times \ddot{s}_{\overline{8}|0,05} \times 1{,}05^{5} = 170.959{,}83\ €$$

9. Una persona, con el fin de dejar en herencia a su hijo un cierto capital, decide depositar hoy 120.000 € en una entidad financiera que le retribuye al 4% anual durante los primeros tres años, y después al 4,5% anual. Transcurridos 7 años desde la imposición, se produce el fallecimiento de dicha persona. El hijo, ya en posesión del capital acumulado, decide retirar el 10% del mismo y percibir el resto mediante una renta de cuantía constante al final de cada mes y durante 8 años. Si la entidad financiera le abona un tipo de interés del 3,5% anual, determinar dicha cuantía constante.

© Ediciones Pirámide

Resolución

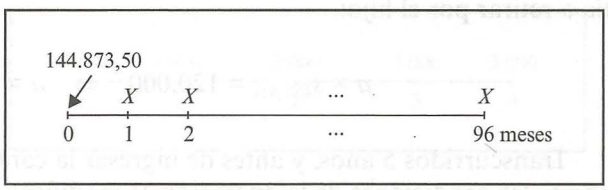
El gráfico hasta el momento del fallecimiento es:



El fallecimiento se produce al cabo de 7 años desde el momento de realizar la imposición. Dicha imposición está 3 años al 4% anual y 4 años al 4,5% anual, por lo que el montante disponible al final del año 7 asciende a:

$$C_7 = 120.000 \times 1{,}04^3 \times 1{,}045^4 = 160.970{,}55$$

Del citado montante retira el 10% de forma inmediata, percibiendo el resto, o sea, 144.873,50 €, a través de una renta mensual de cuantía X durante 8 años. Gráficamente:



El valor actual de dicha renta al tipo de interés mensual del 0,287090% equivalente al 3,5% anual, verifica:

$$144.873{,}50 = X \times a_{\overline{96}|0{,}287090\%} \quad \Rightarrow \quad X = 1.728{,}75\ €$$

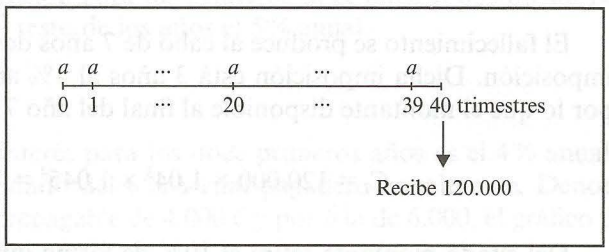
10. Un padre desea que su hijo perciba una determinada cuantía dentro de 10 años. Para ello acuerda con cierta entidad financiera ingresar en una cuenta bancaria, al principio de cada trimestre, una cantidad constante durante los citados 10 años, de tal forma que al finalizar el último trimestre el hijo pueda retirar la cantidad de 120.000 €. La entidad le ofrece un tipo de interés del 6% anual capitalizable trimestralmente, ingresándole en la citada cuenta los intereses corres-

© Ediciones Pirámide

pondientes hasta el final de la operación. Después de transcurridos 5 años, y antes de ingresar la cuantía correspondiente al primer trimestre del año 6, la entidad le sube el tipo de interés al 8% efectivo anual, pero con la condición de que la operación se finalice pasados 4 años después del vencimiento inicial previsto. El padre acepta, pero con la condición de que el capital a retirar sea de 200.000 €. Determinar la nueva cuantía trimestral que deberá ingresar.

Resolución

Denominando a a la cuantía prepagable de la operación inicial, el gráfico correspondiente es:



El tipo de interés equivalente al tanto nominal dado es el 1,5% trimestral, verificándose que el valor final de la renta prepagable ha de coincidir con la cuantía a retirar por el hijo:

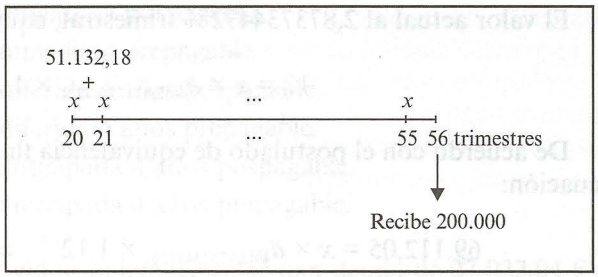
$$a \times \ddot{s}_{\overline{40}|1,5\%} = 120.000 \quad \Rightarrow \quad a = 2.178,57$$

Transcurridos 5 años, y antes de ingresar la cantidad del primer trimestre del año 6, las condiciones de la operación se modifican, por lo que procede determinar el montante disponible en dicho momento, es decir, el valor al final del trimestre 20 de la mencionada renta trimestral:

$$\ddot{V}_{20} = 2.178,57 \times \ddot{s}_{\overline{20}|1,5\%} = 51.132,18$$

Con las nuevas condiciones, se modifica el tipo de interés, que pasa a ser del 8% anual, siendo su equivalente trimestral el 1,9426547%; la duración final, que se incrementa en 4 años, así como el capital a retirar, que pasa a ser de 200.000 €. En consecuencia, faltan 9 años para poder retirar, los 200.000 €, los cuales se obtendrán como el valor final de la cuantía $\ddot{V}_{20} = 51.132,18$ más el valor final de una renta trimestral prepagable de término x, que es preciso determinar. El gráfico es:

© Ediciones Pirámide



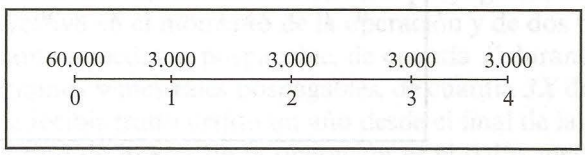
La ecuación de equivalencia verifica:

$$200.000 = 51.132{,}18 \times 1{,}08^{9} + x \times \ddot{s}_{\overline{36}|1{,}9426547\%} \Rightarrow x = 1.865{,}31\ €$$

11. Una empresa realiza la siguiente inversión: desembolsa 60.000 € al contado y pagos de 3.000 € al final de los cuatro años siguientes. Calcular el importe de los cobros prepagables trimestrales que debe recibir la empresa durante 10 años, contados una vez transcurridos 3 años desde el final de los cuatro anteriores, para que la rentabilidad de la operación sea del 12% anual.

Resolución

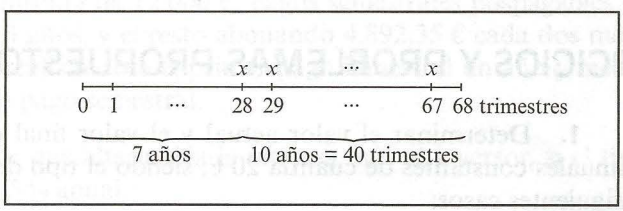
El gráfico del conjunto de pagos o conjunto de la prestación es:



El valor actual del conjunto anterior verifica:

$$V_0 = 60.000 + 3.000 \times a_{\overline{4}|12\%} = 69.112{,}05$$

El conjunto de cobros o contraprestación es:



© Ediciones Pirámide

El valor actual al 2,873734472% trimestral, equivalente al 12% anual, es:

$$V_0 = x \times \ddot{a}_{\overline{40}|2,873734472\%} \times 1,12^{-7}$$

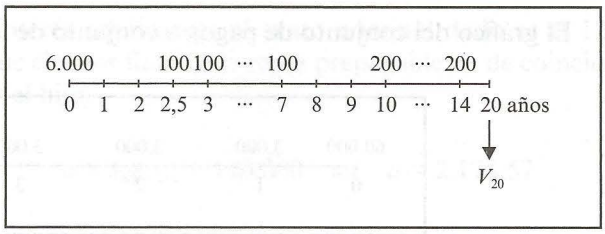
De acuerdo con el postulado de equivalencia financiera, podemos plantear la ecuación:

$$69.112,05 = x \times \ddot{a}_{\overline{40}|2,873734472\%} \times 1,12^{-7} \Rightarrow x = 6.294,70\ €$$

12. Un individuo deposita en una entidad financiera las siguientes cantidades: 6.000 € en el momento inicial; dos años después comienza a pagar al final de cada semestre 100 € durante 5 años; transcurridos dos años desde la última imposición semestral, comienza a depositar 200 € anuales pospagables durante otros 5 años. Si el tipo de interés es del 4,04% anual, determinar el importe del montante que puede retirar dicho individuo al cabo de 20 años desde el inicio de la operación.

Resolución

El gráfico de la operación es el siguiente:



El montante disponible al finalizar la operación está constituido por el valor al final del año 20 de todas las cuantías impuestas:

$$V_{20} = 6.000 \times 1,0404^{20} + 100 \times s_{\overline{10}|2\%} \times 1,0404^{13} + 200 \times s_{\overline{5}|4,04\%} \times$$
$$\times 1,0404^{6} = 16.455,53\ €$$

6.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Determinar el valor actual y el valor final de una renta de 8 términos anuales constantes de cuantía 20 €, siendo el tipo de interés el 5% anual, en los siguientes casos:

© Ediciones Pirámide

a) Renta inmediata pospagable.
b) Renta inmediata prepagable.
c) Renta diferida 4 años pospagable.
d) Renta diferida 4 años prepagable.
e) Renta anticipada 4 años pospagable.
f) Renta anticipada 4 años prepagable.

2. Un individuo quiere cancelar una deuda de 27.022,04 € mediante pagos constantes al final de cada mes durante 10 años. Determinar la cuantía de cada mensualidad, si el tipo de interés es del 6,17% anual.

3. Un sujeto adquiere un coche y le ofrecen dos alternativas de pago:

a) Entregar 3.000 € de entrada y el resto mediante aportaciones mensuales de 300 € durante 3 años.
b) Entregar 3.000 € de entrada y el resto mediante aportaciones mensuales de 230 € durante 5 años.

Determinar qué alternativa le interesa más al comprador, sabiendo que en ambas la primera aportación se realiza al final del mes en el que realiza la entrada y el tipo de interés es del 1% mensual.

4. Un individuo realiza la siguiente operación financiera. Entrega un apartamento con unos rendimientos netos mensuales pospagables de 800 € a cambio de 30.000 € en efectivo en el momento de la operación y de dos rentas: una renta trimestral constante inmediata, pospagable, de cuantía X durante cuatro años, y otra renta de términos semestrales pospagables, de cuantía $3X$ durante tres años, que comenzará a recibir transcurrido un año desde el final de la renta trimestral. Sabiendo que el tipo de interés de la operación es el 0,4% mensual, calcular el valor de X.

5. Una persona va a adquirir una vivienda y le ofrecen dos alternativas de pago:

a) Una entrada de 60.000 € y pagos mensuales pospagables durante 15 años de cuantía 1.463,56 €.
b) Una entrada de 12.000 €, pagos semestrales pospagables de 6.000 € durante 3 años, y el resto abonando 4.892,35 € cada dos meses durante 15 años, realizándose el primer pago bimestral un año y medio después del último pago semestral.

Determinar qué alternativa le interesa más al inversor, si el tipo de interés a aplicar es el 6,5% anual.

© Ediciones Pirámide

6. Un individuo comienza a ahorrar con el objetivo de adquirir un barco, para lo cual deposita en una entidad financiera cuantías trimestrales pospagables de 1.000 € durante cuatro años a un tipo de interés del 1% trimestral. El montante formado lo entrega como entrada en la compra del barco y el resto lo financia mediante pagos mensuales de 433,35 € durante 5 años a un tanto nominal del 5,4% anual pagadero mensualmente. Determinar en el momento de la compra el precio del barco.

© Ediciones Pirámide

7 Valoración de rentas financieras (II)

OBJETIVOS

- Establecer el concepto de renta variable y diferenciar entre los distintos tipos.
- Calcular el valor financiero en cualquier momento del tiempo de las rentas variables, y en particular de las rentas variables en progresión aritmética y geométrica.

SUMARIO

7.1. Concepto y valoración de las rentas variables.
7.2. Rentas de términos variables en progresión aritmética.
7.3. Rentas de términos variables en progresión geométrica.
7.4. Ejercicios y problemas resueltos.
7.5. Ejercicios y problemas propuestos.

7.1. CONCEPTO Y VALORACIÓN DE LAS RENTAS VARIABLES

De acuerdo con la clasificación de las rentas, y atendiendo a la cuantía de los términos, podemos distinguir entre rentas constantes y rentas variables. En general, decimos que una renta es variable cuando sus términos no tienen la misma cuantía.

Tal y como hemos señalado en lecciones precedentes, el valor actual y el valor final de una renta variable inmediata se obtienen valorando en el origen y en el final, respectivamente, cada uno de los términos de la misma. Gráficamente, para una renta inmediata pospagable, tenemos:

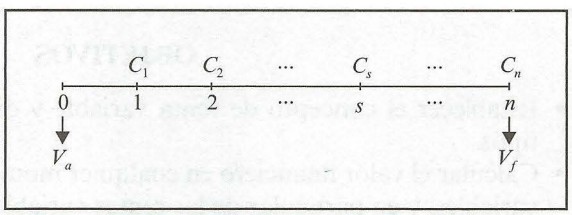


Figura 7.1.

Las cuantías de los términos de una renta variable pueden ser cualesquiera, pero es posible distinguir tres modalidades:

a) Rentas cuyos términos no siguen ninguna ley de formación. Para su valoración es preciso trasladar cada término por separado hasta el punto de valoración.

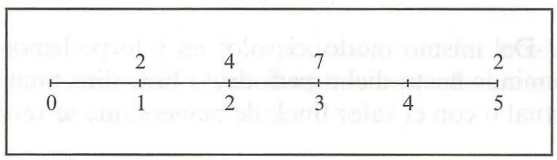
© Ediciones Pirámide

b) Rentas cuyos términos son constantes por intervalos de tiempo. En estas rentas, y para aquellos períodos con términos constantes entre sí, es posible aplicar lo señalado para las rentas constantes.

c) Rentas cuyos términos siguen algún criterio de variabilidad o ley de formación. En este caso, lo más usual es la variabilidad de los términos en progresión aritmética o en progresión geométrica.

EJERCICIO 7.1

Calcular el valor actual y el valor final, para un tipo de interés del 3% anual, de la siguiente renta inmediata, anual y pospagable:



Resolución

$$V_0 = 2(1{,}03)^{-1} + 4(1{,}03)^{-2} + 7(1{,}03)^{-3} + 2(1{,}03)^{-5} = 13{,}84$$

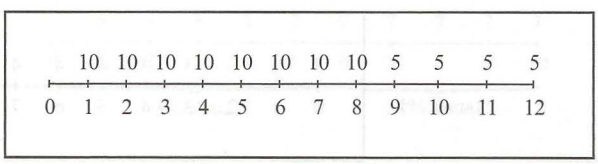
$$V_5 = 13{,}84 \times 1{,}03^5 = 16{,}04$$

EJERCICIO 7.2

Sea una renta inmediata, pospagable, de 12 términos anuales, valorada al 4% anual. La cuantía de los ocho primeros términos es de 10 € y la de los cuatro últimos 5 €. Determinar el valor actual, el valor final y el valor en 6.

Resolución

El gráfico de la renta es el siguiente:



© Ediciones Pirámide

Los ocho primeros términos los podemos considerar como los de una renta constante inmediata, y los cuatro últimos como los de una renta diferida en 8 períodos. Por tanto, el valor actual total es:

$$V_0 = 10 \times a_{\overline{8}|0,04} + 5 \times a_{\overline{4}|0,04} \times 1,04^{-8} = 80,59 \text{ €}$$

El valor final lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta el final del período 12, o bien directamente relacionándolo con el valor actual, de manera que:

$$V_{12} = 10 \times s_{\overline{8}|0,04} \times 1,04^4 + 5 \times s_{\overline{4}|0,04} = 129,03 \text{ €}$$

o bien

$$V_{12} = V_0(1 + i)^{12} = 80,59(1,04)^{12} = 129,03 \text{ €}$$

Del mismo modo, el valor en 6 lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta dicho período, o bien directamente relacionándolo con el valor actual o con el valor final, de manera que se verifica:

$$V_6 = 10 \times s_{\overline{6}|0,04} + 10 \times a_{\overline{2}|0,04} + 5 \times a_{\overline{4}|0,04} \times 1,04^{-2} = 101,97$$

o bien

$$V_6 = V_0(1 + i)^6 = 80,59(1,04)^6 = 101,97 \text{ €}$$

o también

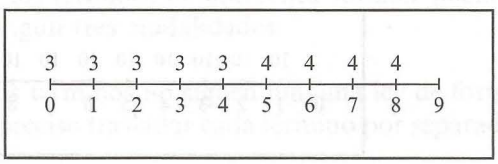
$$V_6 = V_{12}(1 + i)^{-6} = 129,03(1,04)^{-6} = 101,97 \text{ €}$$

EJERCICIO 7.3

Sea una renta temporal, anual, inmediata y prepagable, cuyos cinco primeros términos son de cuantía 3 €, y los cuatro restantes de cuantía 4 €. Para un tipo de interés del 3% anual, determinar el valor actual, el valor final y el valor en 3.

Resolución

Se trata de una renta cuyo gráfico es el siguiente:



© Ediciones Pirámide

El valor actual es:

$$\ddot{V}_0 = 3 \times \ddot{a}_{\overline{5}|0,03} + 4 \times \ddot{a}_{\overline{4}|0,03} \times 1{,}03^{-5} = 27{,}36\ €$$

El valor final lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta el final del período 9, o bien directamente relacionándolo con el valor actual, de manera que:

$$\ddot{V}_9 = 3 \times \ddot{s}_{\overline{5}|0,03} \times 1{,}03^4 + 4 \times \ddot{s}_{\overline{4}|0,03} = 35{,}70\ €$$

o bien

$$\ddot{V}_9 = \ddot{V}_0(1 + i)^9 = 27{,}36(1{,}03)^9 = 35{,}70\ €$$

Del mismo modo, el valor en 3 lo podemos calcular trasladando todos los términos hasta dicho período, o bien directamente relacionándolo con el valor actual o con el valor final, de manera que:

$$\ddot{V}_3 = 3 \times \ddot{s}_{\overline{3}|0,03} + 3 \times \ddot{a}_{\overline{2}|0,03} + 4 \times \ddot{a}_{\overline{4}|0,03} \times 1{,}03^{-2} = 29{,}90\ €$$

o bien

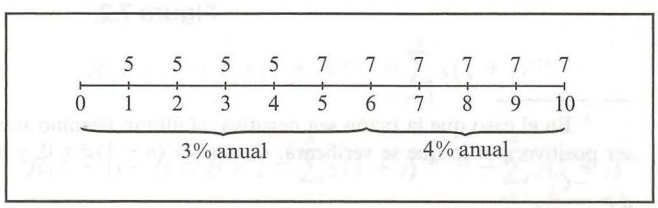
$$\ddot{V}_3 = \ddot{V}_0(1 + i)^3 = 27{,}36(1{,}03)^3 = 29{,}90\ €$$

o también

$$\ddot{V}_3 = \ddot{V}_9(1 + i)^{-6} = 35{,}70(1{,}03)^{-6} = 29{,}90\ €$$

EJERCICIO 7.4

Calcular el valor actual y el valor final de la siguiente renta anual inmediata pospagable, siendo el tipo de interés para los primeros seis años del 3% anual y del 4% anual para los restantes:



© Ediciones Pirámide

Resolución

Es preciso valorar cada tramo de renta según su cuantía y el tipo de interés a aplicar. Así, el valor actual y el final verifican:

$$V_0 = 5 \times a_{\overline{4}|0,03} + 7 \times a_{\overline{2}|0,03} \times 1,03^{-4} + 7 \times a_{\overline{4}|0,04} \times 1,03^{-6} = 51,77\ €$$

$$V_{10} = 5 \times s_{\overline{4}|0,03} \times 1,03^2 \times 1,04^4 + 7 \times s_{\overline{2}|0,03} \times 1,04^4 + 7 \times s_{\overline{4}|0,04} =$$

$$= 51,77 \times 1,03^6 \times 1,04^4 = 72,32\ €$$

7.2. RENTAS DE TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

En una renta de términos variables en progresión aritmética, la cuantía de cada término, excepto el primero, se obtiene añadiendo al anterior una determinada cuantía constante d llamada razón. Por tanto, para cualquier término s se verifica: $C_s = C_{s-1} + d$. En función del primer término tenemos: $C_s = C_1 + (s-1)d$. El primer término ha de ser positivo, y la razón puede ser positiva o negativa[1].

Vamos a plantear el cálculo del valor actual de la renta temporal, inmediata, pospagable, y a partir de ella se deducirán los valores actuales y finales de cualquier otra renta, teniendo en cuenta las relaciones analizadas en la lección anterior.

7.2.1. Renta temporal, inmediata y pospagable

El gráfico de esta renta es el siguiente:

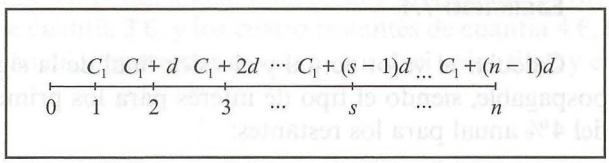


Figura 7.2.

[1] En el caso que la razón sea negativa, el último término será el de menor cuantía, pero ha de ser positivo, por lo que se verificará: $C_n = C_1 + (n-1)d > 0$, y por tanto la razón ha de verificar: $d > \frac{-C_1}{n-1}$.

© Ediciones Pirámide

El valor actual para un tipo de interés constante verifica:

$$V_a = A_{(C_1, d)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$$

Teniendo en cuenta que los términos cumplen la relación $C_s = C_1 + (s-1)d$, al sustituir se llega a:

$$A_{(C_1, d)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} [C_1 + (s-1)d](1+i)^{-s}$$

Desarrollando la expresión anterior, tenemos:

$$A_{(C_1, d)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} [C_1(1+i)^{-s} + (s-1)d(1+i)^{-s}] =$$

$$= \sum_{s=1}^{n} C_1(1+i)^{-s} + d\sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s} - d\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s}$$

Teniendo en cuenta que se verifica:

$$\sum_{s=1}^{n} C_1(1+i)^{-s} = C_1 \times a_{\overline{n}|i};\ d\sum_{s=1}^{n}(1+i)^{-s} = d \times a_{\overline{n}|i}$$

y denominando

$$B = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s}$$

tenemos:

$$A_{(C_1, d)\overline{n}|i} = C_1 \times a_{\overline{n}|i} + d \times B - d \times a_{\overline{n}|i}$$

En la expresión de B multiplicamos ambos miembros por el factor de capitalización y le restamos B, obteniendo:

$$B(1+i) = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s+1} = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-(s-1)}$$

$$B(1+i) - B = B \times i = \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-(s-1)} - \sum_{s=1}^{n} s(1+i)^{-s}$$

© Ediciones Pirámide

Desarrollando los sumatorios, se tiene:

$$B \times i = [(1+i)^0 + 2(1+i)^{-1} + 3(1+i)^{-2} + \ldots + n(1+i)^{-(n-1)}] -$$
$$-[(1+i)^{-1} + 2(1+i)^{-2} + \ldots + (n-1) \times (1+i)^{-(n-1)} + n(1+i)^{-n}]$$

Efectuando las diferencias, se llega a:

$$B \times i = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)} - n(1+i)^{-n} =$$
$$= [1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)}] - n(1+i)^{-n}$$

Ahora bien, la expresión anterior entre corchetes es el valor actual de una renta temporal, unitaria y prepagable:

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = 1 + (1+i)^{-1} + (1+i)^{-2} + \ldots + (1+i)^{-(n-1)}$$

Pero $\ddot{a}_{\overline{n}|i} = (1+i)a_{\overline{n}|i}$, por lo que tenemos: $B \times i = (1+i)a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}$. De donde se llega a:

$$B = \frac{(1+i) \times a_{\overline{n}|i} - n(1+i)^{-n}}{i} = \frac{1}{i} \times a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - \frac{n(1+i)^{-n}}{i}$$

Al ser $a_{\overline{n}|i} = \dfrac{1-(1+i)^{-n}}{i}$, obtenemos: $\dfrac{(1+i)^{-n}}{i} = \dfrac{1}{i} - a_{\overline{n}|i}$. Y al sustituir queda:

$$B = \frac{1}{i} \times a_{\overline{n}|i} + a_{\overline{n}|i} - n\left(\frac{1}{i} - a_{\overline{n}|i}\right) = \frac{a_{\overline{n}|i}}{i} + a_{\overline{n}|i} - \frac{n}{i} + n \times a_{\overline{n}|i}$$

Y en consecuencia, la expresión que ya tenemos del valor actual sería:

$$A_{(C_1, d)\overline{n}|i} = C_1 \times a_{\overline{n}|i} + d \times B - d \times a_{\overline{n}|i} =$$
$$= C_1 \times a_{\overline{n}|i} + d\left[\frac{a_{\overline{n}|i}}{i} + a_{\overline{n}|i} - \frac{n}{i} + n \times a_{\overline{n}|i}\right] - d \times a_{\overline{n}|i}$$

Efectuando operaciones, se llega a:

$$A_{(C_1, d)\overline{n}|i} = \left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

Teniendo en cuenta las relaciones generales obtenidas, el valor final verifica:

$$S_{(C_1, d)\overline{n}|i} = A_{(C_1, d)\overline{n}|i}(1+i)^n$$

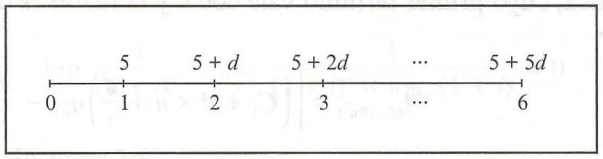
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 7.5

Calcular el valor actual y el valor final de una renta inmediata de 6 términos anuales pospagables, sabiendo que la cuantía del primer término es de 5 € y que el importe de los siguientes términos aumenta anualmente en 10 € con respecto al anterior, siendo el tipo de interés el 5% anual.

Resolución

La representación gráfica de esta renta es la siguiente:



El valor actual es:

$$A_{(C_1=5,\ d=10)\overline{n=6}|i=5\%} = \left(5 + 10 \times 6 + \frac{10}{0{,}05}\right) \times a_{\overline{6}|5\%} - \frac{10 \times 6}{0{,}05} = 145{,}06\ €$$

A partir del valor actual, calculamos el valor final:

$$S_{(C_1=5,\ d=10)\overline{n=6}|5\%} = A_{(C_1=5,\ d=10)\overline{n=6}|5\%}(1 + i)^n = 145{,}06(1 + 0{,}05)^6 = 194{,}39\ €$$

7.2.2. Renta temporal, inmediata y prepagable

El valor actual y el final de esta renta se calculan teniendo en cuenta las relaciones establecidas con las rentas pospagables, de modo que se verifica:

$$\ddot{A}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i} = A_{(C_1,\ d)\overline{n}|i}(1 + i) = \left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right] \times (1 + i)$$

$$\ddot{S}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i} = S_{(C_1,\ d)\overline{n}|i}(1 + i)$$

También se cumple:

$$\ddot{S}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1,\ d)\overline{n}|i}(1 + i)^n$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 7.6

Calcular el valor actual y el valor final de una renta inmediata de 20 términos anuales prepagables, sabiendo que la cuantía del primer término es de 600 € y que anualmente aumenta en 50 € con respecto a la cuantía del año anterior, siendo el tipo de interés del 5% anual.

Resolución

Se trata de una renta prepagable, de términos variables en progresión aritmética, cuyo primer término vale 600 € y la razón es de 50 €. Tenemos:

$$\ddot{A}_{(C_1,d)\overline{n}|i} = \left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right](1+i) =$$

$$= \left[\left(600 + 50 \times 20 + \frac{50}{0{,}05}\right)a_{\overline{20}|5\%} - \frac{50 \times 20}{0{,}05}\right](1 + 0{,}05) = 13.021{,}84\ €$$

El valor final es:

$$\ddot{S}_{(C_1,d)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1,d)\overline{n}|i}(1+i)^n = 13.021{,}84 \times 1{,}05^{20} = 34.550{,}81\ €$$

7.2.3. Renta perpetua, inmediata y pospagable

El valor actual de la renta perpetua se obtiene como el límite del valor actual de la renta temporal cuando el número de períodos tiende a infinito. Así, en la renta perpetua, inmediata y pospagable, se verifica:

$$A_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} A_{(C_1,d)\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty}\left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right] =$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left[\left(C_1 + \frac{d}{i}\right)a_{\overline{n}|i} + d \times n \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right]$$

Tal y como señalamos en las rentas unitarias, perpetuas, constantes e inmediatas, su valor actual verifica: $\lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}$, por lo que tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$A_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i} + \lim_{n\to\infty}\left[d \times n\left(a_{\overline{n}|i} - \frac{1}{i}\right)\right]$$

Para calcular el límite de la expresión anterior, hemos de desarrollarla antes:

$$d \times n\left(a_{\overline{n}|i} - \frac{1}{i}\right) = d \times n\left[\frac{1-(1+i)^{-n}}{i} - \frac{1}{i}\right] = -d \times n \times \frac{(1+i)^{-n}}{i} = \frac{-d}{i} \times \frac{n}{(1+i)^n}$$

Para calcular $\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+i)^n}$, al ser de la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$, utilizamos la regla de L´Hopital, llegándose a:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{(1+i)^n} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(1+i)^n \times \log_e (1+i)} = 0$$

En consecuencia, queda:

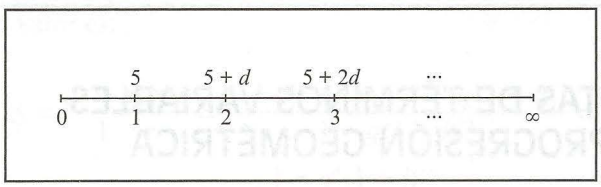
$$A_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$$

EJERCICIO 7.7

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, pospagable y perpetua, sabiendo que la cuantía del primer término es de 5 € y que anualmente aumenta 10 € con respecto al período anterior, siendo el tipo de interés el 5% anual.

Resolución

La representación gráfica de esta renta es la siguiente:



El valor actual es:

$$A_{(C_1=5,\ d=10)\overline{\infty}|5\%} = \left(5 + \frac{10}{0{,}05}\right)\frac{1}{0{,}05} = 4{,}100\ €$$

© Ediciones Pirámide

7.2.4. Renta perpetua, inmediata y prepagable

Teniendo en cuenta la relación entre el valor actual de la renta prepagable y el de la pospagable, se verifica:

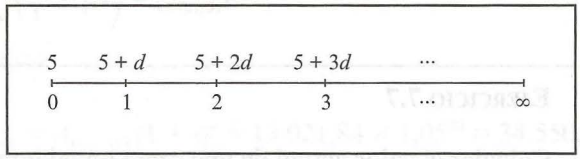
$$\ddot{A}_{(C_1,d)\overline{\infty}|i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i} \times (1+i)$$

EJERCICIO 7.8

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, prepagable, perpetua, sabiendo que la cuantía del primer término es de 5 € y que anualmente aumenta 10 € con respecto al período anterior, siendo el tipo de interés el 5% anual.

Resolución

La representación gráfica de esta renta es la siguiente:



El valor actual es:

$$\ddot{A}_{(C_1=5,d=10)\overline{\infty}|5\%} = \left(5 + \frac{10}{0{,}05}\right)\frac{1}{0{,}05} \times 1{,}05 = 4{,}305\ €$$

7.3. RENTAS DE TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Una renta de términos variables en progresión geométrica es aquella en la que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando el anterior por una cuantía constante q denominada razón. Por tanto, los términos verifican: $C_s = C_{s-1} \times q$, o bien, en función del primer término: $C_s = C_1 \times q^{s-1}$. Tanto el primer término como la razón han de ser números positivos para que los restantes términos también lo sean.

© Ediciones Pirámide

Del mismo modo que en las rentas variables en progresión aritmética, partiendo del valor actual de la renta temporal, inmediata, pospagable, calculamos el valor actual y el valor final de los otros tipos de rentas.

7.3.1. Renta temporal, inmediata y pospagable

El gráfico de esta renta es el siguiente:

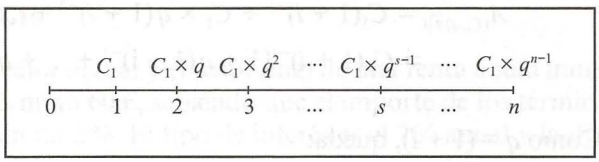


Figura 7.3.

Vamos a determinar el valor actual para un tipo de interés constante. De acuerdo con el concepto de valor actual, se verifica:

$$V_a = A_{(C_1,q)\overline{n}|i} = \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$$

Y sustituyendo:

$$A_{(C_1,q)\overline{n}|i} = C_1(1+i)^{-1} + C_1 \times q(1+i)^{-2} + \ldots + C_1 \times q^{n-1}(1+i)^{-n} =$$
$$= C_1(1+i)^{-1}[1 + q(1+i)^{-1} + \ldots + q^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}]$$

La expresión recogida entre corchetes es la suma de una sucesión de términos variables en progresión geométrica, de primer término la unidad y razón igual a $q(1+i)^{-1}$, cuyo valor es:

$$S = \frac{a_1 - a_n \times r}{1-r} = \frac{1 - q^{n-1}(1+i)^{-(n-1)}\, q(1+i)^{-1}}{1 - q(1+i)^{-1}} =$$
$$= (1+i)\frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

Y al sustituir en la ecuación anterior del valor actual, se verifica:

$$A_{(C_1,q)\overline{n}|i} = C_1 \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q}$$

© Ediciones Pirámide

El valor final se obtiene de acuerdo con la expresión:

$$S_{(C_1, q)\overline{n}|i} = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^n$$

Para el caso particular en el que la razón de la progresión sea $q = (1 + i)$, no se puede aplicar directamente la expresión anterior del valor actual, por lo que es preciso determinar el valor actual de cada término. Así, tenemos:

$$A_{(C_1, q)\overline{n}|i} = C_1(1 + i)^{-1} + C_1 \times q(1 + i)^{-2} + \ldots + C_1 \times q^{n-1}(1 + i)^{-n} =$$
$$= C_1(1 + i)^{-1}[1 + q(1 + i)^{-1} + \ldots + q^{n-1}(1 + i)^{-(n-1)}]$$

Como $q = (1 + i)$, queda:

$$A_{(C_1, q=1+i)\overline{n}|i} = C_1(1 + i)^{-1}[1 + 1 + \ldots + 1]$$

Y en consecuencia:

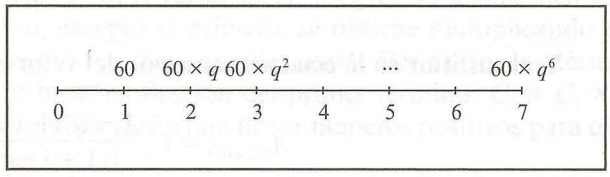
$$A_{(C_1, q=1+i)\overline{n}|i} = \frac{C_1 \times n}{1 + i}$$

EJERCICIO 7.9

Calcular el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata pospagable de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual y la duración 7 años.

Resolución

Tenemos una renta pospagable, inmediata y temporal, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, siendo su representación gráfica la siguiente:



© Ediciones Pirámide

El valor actual de esta renta es:

$$A_{(C_1, q)\overline{n}|i} = 60 \times \frac{1 - 1{,}02^7(1 + 0{,}04)^{-7}}{1 + 0{,}04 - 1{,}02} = 381{,}28\ €$$

y el valor final:

$$S_{(C_1, q)\overline{n}|i} = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^n = 381{,}28 \times 1{,}04^7 = 501{,}74\ €$$

EJERCICIO 7.10

Calcular el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata pospagable de primer término 60 €, sabiendo que el importe de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 2% anual y la duración 7 años.

Resolución

Tenemos una renta pospagable, inmediata y temporal, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, por lo que en este caso se verifica que $q = 1 + i$. De acuerdo con lo expuesto, el valor actual y final verifican:

$$A_{(C_1, q=1+i)\overline{n}|i} = \frac{60 \times 7}{1{,}02} = 411{,}76\ €$$

$$S_{(C_1, q)\overline{n}|i} = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^n = 411{,}76 \times 1{,}02^7 = 472{,}98\ €$$

7.3.2. Renta temporal, inmediata y prepagable

Los valores actual y final de esta renta se calcularán teniendo en cuenta las relaciones establecidas con las rentas pospagables, de modo que se verifica:

$$\ddot{A}_{(C_1, q)\overline{n}|i} = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i) \text{ y } \ddot{S}_{(C_1, q)\overline{n}|i} = S_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)$$

También se cumple:

$$\ddot{S}_{(C_1, q)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^n$$

EJERCICIO 7.11

Calcular el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata prepagable de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual y la duración 7 años.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Tenemos una renta prepagable, inmediata y temporal, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$. El valor actual de esta renta es:

$$\ddot{A}_{(C_1, q)\overline{n}|i} = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1+i)\left[60 \times \frac{1 - 1{,}02^7(1+0{,}04)^{-7}}{1+0{,}04-1{,}02}\right]1{,}04 = 381{,}28 \times 1{,}04 =$$
$$= 396{,}53\ €$$

El valor final es:

$$\ddot{S}_{(C_1, q)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1+i)^n = 396{,}53 \times 1{,}04^7 = 521{,}81\ €$$

7.3.3. Renta perpetua, inmediata y pospagable

El valor actual de la renta perpetua se obtiene como el límite del valor actual de la renta temporal cuando el número de períodos tiende a infinito. Así, en la renta perpetua, inmediata y pospagable, se verifica:

$$A_{(C_1, q)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} A_{(C_1, q)\overline{n}|i} = \lim_{n\to\infty} C_1 \times \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1+i-q} = \lim_{n\to\infty} C_1 \times \frac{1 - \left(\frac{q}{1+i}\right)^n}{1+i-q}$$

En la expresión anterior, el $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{q}{1+i}\right)^n$, cuando $q < (1+i)$ toma valor nulo, al ser el numerador inferior al denominador. En cambio, cuando $q > (1+i)$, al ser el numerador superior al denominador, el valor del límite es infinito y la renta carece de valor actual. Para el caso en que sea $q = (1+i)$, tenemos:

$$A_{(C_1, q=1+i)\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} \frac{C_1 \times n}{1+i} = \infty$$

En consecuencia, sólo tiene sentido hablar de valor actual de las rentas perpetuas de términos variables en progresión geométrica, si la razón es inferior al factor unitario de capitalización, o sea: $q < (1+i)$. El valor actual es:

$$A_{(C_1, q)\overline{\infty}|i} = \frac{C_1}{1+i-q}$$

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 7.12

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, perpetua y pospagable, de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual.

Resolución

Tenemos una renta pospagable, perpetua, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, por lo que al ser $q < 1 + i$, el valor actual de esta renta verifica:

$$A_{(C_1,q)\overline{\infty}|i} = \frac{60}{1 + 0{,}04 - 1{,}02} = 3.000\ €$$

7.3.4. Renta perpetua, inmediata y prepagable

Teniendo en cuenta la relación entre el valor actual de la renta prepagable y el de la pospagable, se verifica para $q < (1 + i)$:

$$\ddot{A}_{(C_1,q)\overline{\infty}|i} = \frac{C_1}{1 + i - q}(1 + i)$$

EJERCICIO 7.13

Calcular el valor actual de una renta anual inmediata, perpetua y prepagable, de primer término 60 €, sabiendo que la cuantía de los términos se incrementa anualmente en un 2%. El tipo de interés es el 4% anual.

Resolución

Tenemos una renta prepagable, perpetua, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}02$, por lo que al ser $q < 1 + i$, el valor actual de esta renta verifica:

$$\ddot{A}_{(C_1,q)\overline{\infty}|i} = \frac{60}{1 + 0{,}04 - 1{,}02} \times 1{,}04 = 3.120\ €$$

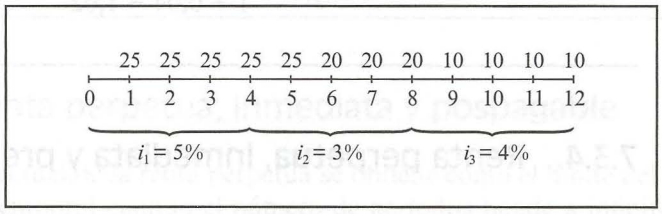
© Ediciones Pirámide

7.4. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Determinar el valor actual y el valor final de una renta anual inmediata, pospagable, de 12 años de duración. Los cinco primeros términos son de cuantía 25 €, los tres siguientes de 20 € y los restantes de 10 €. El tipo de interés a aplicar en los cuatro primeros años es el 5% anual, en los cuatro siguientes el 3% anual y en los restantes el 4% anual.

Resolución

El gráfico de la renta es el siguiente:



Se trata de una renta variable, con tramos de términos constantes, que se valora con distintos tipos de interés. Por tanto, trasladando al momento 0 todos los capitales, tenemos que el valor actual es:

$$V_0 = 25 \times a_{\overline{4}|0,05} + 25(1,03)^{-1}(1,05)^{-4} + 20 \times a_{\overline{3}|0,03}(1,03)^{-1}(1,05)^{-4} + 10 \times$$
$$\times a_{\overline{4}|0,04}(1,03)^{-4}(1,05)^{-4} = 180,34\ €$$

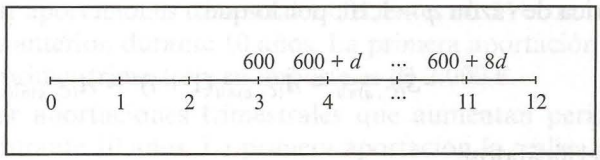
2. Determinar el valor actual y el valor final de una renta temporal, prepagable, diferida en 3 años, de nueve términos anuales variables en progresión aritmética de razón 30 €. Se sabe que el cuarto término vale 690 € y el tipo de interés es el 3% anual.

Resolución

De acuerdo con los datos, el primer capital vence al inicio del año 4 y el número de términos es 9, por lo que el último término vence al principio del año 12. Como conocemos la cuantía del cuarto término y la razón, podemos determinar la cuantía del primer término, sabiendo que: $C_s = C_1 + (s - 1)d$, de modo que se verifica: $C_4 = C_1 + (4 - 1)d \Rightarrow 690 = C_1 + 3 \times 30$, siendo por tanto $C_1 = 600$.

© Ediciones Pirámide

La representación gráfica de la renta es:



De acuerdo con el gráfico, el valor actual lo podemos calcular bien considerando una renta pospagable variable en progresión aritmética diferida dos períodos, o bien considerando una renta prepagable variable en progresión aritmética diferida tres períodos. Vamos a calcular dicho valor actual considerándola prepagable, de modo que se verifica:

$$\ddot{V}_0 = \ddot{A}_{(C_1,\, d)\overline{n}|i}(1+i)^{-3} = A_{(C_1,\, d)\overline{n}|i}(1+\mathrm{i})(1+\mathrm{i})^{-3}$$

Sustituyendo los valores:

$$\ddot{V}_0 = \left[\left(600 + 30 \times 9 + \frac{30}{0{,}03}\right) a_{\overline{9}|3\%} - \frac{30 \times 9}{0{,}03}\right](1{,}03)(1{,}03)^{-3} = 5.240{,}86\ €$$

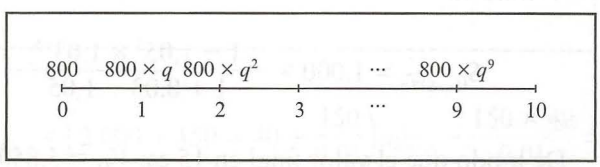
El valor final de esta renta diferida coincide con el de una renta inmediata de 9 términos, y lo calculamos a partir del valor obtenido en 0, teniendo en cuenta la relación entre el valor final y el valor actual, por lo que:

$$\ddot{V}_{12} = 5.240{,}86 \times 1{,}03^{12} = 7.472{,}21\ €$$

3. Una persona deposita en un banco el primero de enero de cierto año 800 €, y en la misma fecha de cada uno de los siguientes 10 años impone una cantidad que es un 10% mayor que la del año anterior. ¿Que capital reunirá al cabo de 10 años de efectuar la primera imposición, si la entidad capitaliza al 3% anual?

Resolución

El gráfico de la renta es el siguiente:



© Ediciones Pirámide

Nos piden calcular el valor final, al 3% anual, de una renta anual de 10 años de duración, inmediata y prepagable, cuyos términos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}10$, por lo que:

$$\ddot{S}_{(C_1, q)\overline{n}|i} = \ddot{A}_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^n = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)(1 + i)^n$$

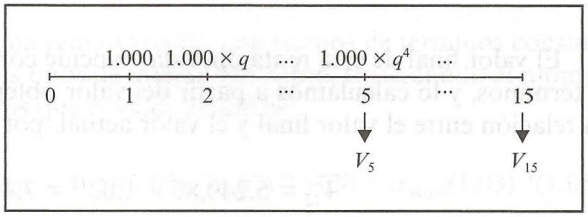
verificándose:

$$\ddot{S}_{(C_1, q)\overline{n}|i} = \left[800 \times \frac{1 - 1{,}10^{10}(1 + 0{,}03)^{-10}}{1 + 0{,}03 - 1{,}10}\right] 1{,}03^{11} = 14.712{,}24\ €$$

4. Un individuo realiza aportaciones anuales durante 5 años, que van creciendo cada año un 5% con respecto al período anterior. La primera aportación la realiza al final del año 1 y su importe es de 1.000 €. Calcular el valor de estas aportaciones al final del año 15, si el tipo de interés es del 3% anual.

Resolución

La gráfica de la renta es:



Tenemos una renta pospagable de cinco términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1{,}05$, de la que nos piden su valor al cabo de 15 años. Se trata de una renta anticipada en 10 períodos, de manera que el valor pedido es:

$$V_{15} = S_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^{10}, \text{ siendo } S_{(C_1, q)\overline{n}|i} = A_{(C_1, q)\overline{n}|i}(1 + i)^n$$

de manera que el valor final, en 10, de la renta inmediata de 5 años de duración, es:

$$S_{(C_1, q)\overline{n}|i} = 1.000 \times \frac{1 - 1{,}05^5 \times 1{,}03^{-5}}{1 + 0{,}03 - 1{,}05} \times 1{,}03^5 = 5.850{,}37$$

De modo que el valor final en 15 es: $V_{15} = 5.850{,}37 \times 1{,}03^{10} = 7.862{,}41$ €.

© Ediciones Pirámide

5. Un inversor adquiere un piso y le ofrecen dos alternativas de pago:

a) Entregar aportaciones trimestrales crecientes un 5% con respecto a la del período anterior, durante 10 años. La primera aportación la realiza al final del primer trimestre y su importe es de 2.000 €.

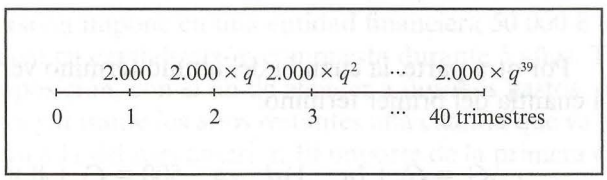
b) Entregar aportaciones trimestrales que aumentan periódicamente en 150 €, durante 10 años. La primera aportación la realiza al final del primer trimestre y su importe es de 2.000 €.

Determinar qué alternativa le interesa más al inversor, suponiendo un tipo de interés del 1% trimestral.

Resolución

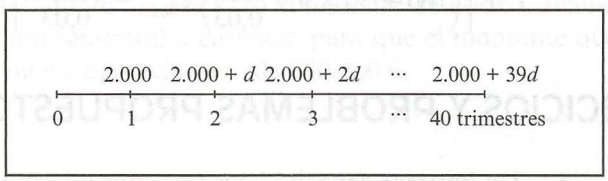
Para comparar ambas alternativas, calcularemos el valor de cada una de ellas en el momento de la compra. La que menor valor actual presente será la alternativa más ventajosa para el inversor.

a) En este caso nos encontramos con una renta trimestral variable en progresión geométrica de razón $q = 1{,}05$, cuyo valor actual verifica:



$$A_{(C_1=2.000,\,q=1{,}05)\overline{40}|1\%} = 2.000 \times \frac{1 - 1{,}50^{40} \times 1{,}01^{-40}}{1 + 0{,}01 - 1{,}05} = 186.421{,}53\ €$$

b) Nos encontramos con una renta trimestral variable en progresión aritmética de razón $d = 150$, cuyo valor actual verifica:



$$A_{(C_1=2.000,\,d=150)\overline{40}|1\%} = \left(2.000 + 150 \times 40 + \frac{150}{0{,}01}\right) a_{\overline{40}|1\%} - \frac{150 \times 40}{0{,}01} = 155.197{,}78\ €$$

© Ediciones Pirámide

La alternativa que más le interesa al inversor es la *b*, ya que su valor actual es menor.

6. Una persona adquiere un coche pagando 15.000 € de entrada y el resto mediante pagos semestrales variables que aumentan en 50 € cada semestre. Se sabe que el quinto término vence al final del año 3, y que la cuantía del último término es de 500 €, venciendo al final del año 5. Para un tipo de interés del 6,09% anual, calcular el precio del coche.

Resolución

El precio del coche es la suma de la cuantía de entrada con el valor actual de la renta semestral pospagable, de términos variables en progresión aritmética de razón 50 €. Para determinar el valor actual de dicha renta es preciso determinar la cuantía del primer término y su vencimiento, así como el número de términos.

Como el quinto término vence al final del año 3 (semestre 6), el primero vence al final del semestre 2. Como el último término vence al final del semestre 10, y los vencimientos varían en progresión aritmética de razón $t = 1$, el número de términos es 9, deducido de:

$$t_n = t_1 + (n-1)t \Rightarrow 10 = 2 + n - 1 \Rightarrow n = 9$$

Por otra parte, la cuantía del último término verifica la siguiente relación con la cuantía del primer término:

$$C_n = C_1 + (n-1)d \Rightarrow 500 = C_1 + 8 \times 50 \Rightarrow C_1 = 100$$

Por tanto, el precio del coche, valorado al 3% semestral, verifica:

$$V_0 = 15.000 + A_{(C_1=100,d=50)\overline{9}|3\%} \times 1{,}03^{-1} = 15.000 +$$

$$+\left[\left(100 + 50 \times 9 + \frac{50}{0{,}03}\right)a_{\overline{9}|0{,}03} - \frac{50 \times 9}{0{,}03}\right]1{,}03^{-1} = 17.193{,}41\ €$$

7.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Un inversor depositó hace tres años un capital de 12.000 € en una entidad que ofrece una rentabilidad del 3,97% anual capitalizable semestralmente. En estos momentos, acuerda recibir el montante obtenido de la siguiente manera: de forma inmediata percibe 2.031,15 €, y el resto lo recibirá mediante una renta de

© Ediciones Pirámide

términos anuales al final de cada uno de los siguientes 5 años, cuyas cuantías crecen anualmente un 10%. Determinar la cuantía del primer término de esta renta anual, si el tipo de interés de esta renta es del 2% anual.

2. Calcular el valor actual de una renta perpetua que se incrementa todos los años un 2%, sabiendo que la cuantía recibida el primer año asciende a 12.000 €, y que el tipo de interés anual es del 4%, en los siguientes casos: *a*) las cuantías se reciben al final de cada año; *b*) las cuantías se reciben al principio de cada año.

3. Determinar el valor actual y el valor final de una renta de 10 términos anuales variables en progresión aritmética de razón 90 €, sabiendo que la cuantía del primer término es de 30 € y que el tipo de interés es el 4% anual, en los siguientes casos:

a) Renta inmediata pospagable.
b) Renta inmediata prepagable.
c) Renta diferida 3 años pospagable.
d) Renta diferida 3 años prepagable.
e) Renta anticipada 3 años pospagable.
f) Renta anticipada 3 años prepagable.

4. Una persona impone en una entidad financiera 50.000 € a un tipo de interés del 5% anual en capitalización compuesta durante 5 años. Transcurrido un año desde la imposición, con el fin de atender a diversos gastos, decide retirar al final de cada mes y durante los años restantes una cuantía que va aumentando en 30 € con respecto a la del mes anterior. El importe de la primera cuantía retirada es 30 €. Calcular el montante que puede retirar al final de la operación.

5. Un individuo ha ido depositando durante 8 años una cuantía al final de cada mes, la cual se incrementa mensualmente en 10 €. El importe de la primera cuantía impuesta es de 60 € y el tipo de interés del 5% anual. En estos momentos decide retirar el montante constituido e imponerlo 5 años en otra entidad que le proporciona el 6% anual, entregando además cuantías semestrales pospagables que van aumentando un 5% respecto al semestre anterior. Calcular el importe de la primera cuantía semestral a entregar, para que el montante que pueda retirar al final de esta nueva operación sea de 550.000 €.

© Ediciones Pirámide

8 Valoración de rentas financieras (III)

OBJETIVOS

- Establecer los conceptos de renta fraccionada, continua y de periodicidad superior a la unidad de tiempo.
- Calcular el valor financiero en cualquier momento del tiempo de las rentas citadas.

SUMARIO

8.1. Introducción.
8.2. Rentas fraccionadas.
8.3. Rentas continuas.
8.4. Rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo.
8.5. Ejercicios y problemas resueltos.
8.6. Ejercicios y problemas propuestos.

8.1. INTRODUCCIÓN

Atendiendo a la clasificación de las rentas, hemos señalado que las rentas discretas pueden ser de período uniforme y de período no uniforme. Las rentas de período uniforme se caracterizan porque el tiempo transcurrido entre los vencimientos de los términos es constante. En cambio, en las de período no uniforme, el tiempo transcurrido entre cada dos vencimientos no es constante. Dentro de las rentas de período uniforme podemos distinguir a su vez entre rentas enteras, rentas fraccionadas y rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo.

Las rentas enteras son aquellas en las que la periodicidad en el vencimiento de sus términos coincide con la unidad de tiempo. Por ejemplo, si consideramos como unidad de tiempo el año, una renta anual es una renta entera; pero si consideramos como unidad de tiempo el semestre, una renta semestral también será una renta entera.

En esta lección analizaremos las rentas discretas con periodicidad distinta a la unitaria, es decir, estudiaremos las rentas fraccionadas y las rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo, así como las rentas continuas.

8.2. RENTAS FRACCIONADAS

Las rentas fraccionadas son aquellas en las que la periodicidad en el vencimiento de sus términos es inferior a la unidad de tiempo. Por tanto, dividiendo la unidad de tiempo en m partes iguales, el tiempo transcurrido entre dos vencimientos consecutivos es $1/m$ de dicha unidad, dando origen a las *rentas fraccionadas de frecuencia m*. Ahora bien, al poder tomar cualquier período de tiempo como unidad del mismo, el concepto de fraccionamiento es relativo. Así, una renta mensual es fraccionada de una renta anual, de una semestral, de una trimestral, etc., y tam-

© Ediciones Pirámide

bién una renta semestral puede ser considerada como renta entera (si tomamos el semestre como unidad de tiempo) o como fraccionada de una anual (si tomamos el año como unidad de tiempo).

En este epígrafe analizaremos las rentas con **fraccionamiento uniforme**, en las cuales tanto la cuantía como la unidad de tiempo se dividen en m partes iguales.

8.2.1. Renta fraccionada, inmediata, temporal y pospagable

Se trata de una renta cuyos términos son de cuantía $\frac{C_s}{m}$ con vencimiento al final de cada subintervalo de amplitud $1/m$ de la unidad de tiempo, cuyo gráfico es el siguiente:

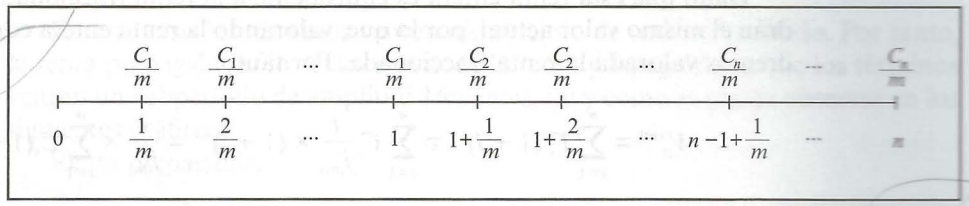


Figura 8.1.

Para valorar dicha renta nos fijamos en el período s, siendo el gráfico:

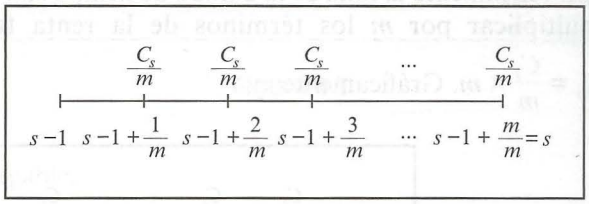


Figura 8.2.

El valor en s de los m términos del período s, es el valor final de una renta de m términos de cuantía constante, valorados al tipo $i^{(m)}$ del subperíodo. Dicho valor F_s verifica:

$$F_s = \frac{C_s}{m} \times s_{\overline{m}|i^{(m)}} = \frac{C_s}{m} \times \frac{[1+i^{(m)}]^m - 1}{i^{(m)}} = \frac{C_s}{m} \times \frac{1+i-1}{i^{(m)}} = C_s \frac{i}{j_{(m)}}$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, el valor final en s de los m términos del período s de la renta fraccionada es equivalente al término F_s, de modo que la renta entera cuyos términos son de cuantía F_s constituye **la renta entera equivalente** a la renta fraccionada. Podemos representar gráficamente la renta entera equivalente a la fraccionada como:

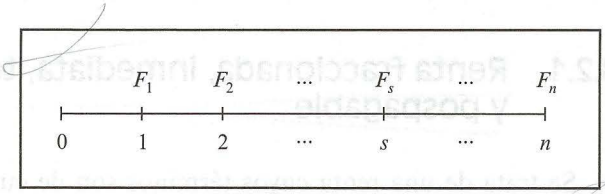


Figura 8.3.

Dado que esta renta entera es equivalente a la renta fraccionada, ambas tendrán el mismo valor actual, por lo que, valorando la renta entera equivalente, tendremos valorada la renta fraccionada. Por tanto:

$$V_a^{(m)} = \sum_{s=1}^{n} F_s\,(1+i)^{-s} = \sum_{s=1}^{n} C_s \frac{i}{j_{(m)}} \times (1+i)^{-s} = \frac{i}{j_{(m)}} \times \sum_{s=1}^{n} C_s (1+i)^{-s}$$

En la igualdad anterior tenemos la expresión $\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s}$, la cual constituye el valor actual de una renta entera de n términos de cuantía C_s. A dicha renta entera la denominamos **renta correspondiente.**

La **renta entera correspondiente pospagable** es aquella renta cuyos términos con vencimiento al final de la unidad de tiempo son de cuantía C_s, obteniéndose al multiplicar por m los términos de la renta fraccionada, de manera que $C_s = \frac{C_s}{m} \times m$. Gráficamente:

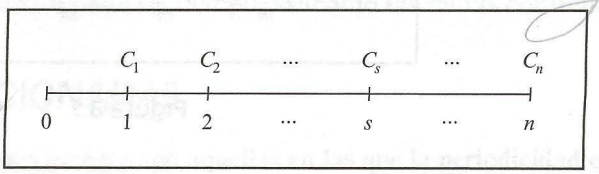


Figura 8.4.

En consecuencia, teniendo en cuenta que $\sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = V_a$ es el valor actual de la renta entera correspondiente, se verifica que:

© Ediciones Pirámide

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times \sum_{s=1}^{n} C_s(1+i)^{-s} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

Por tanto, la expresión general anterior nos indica que el valor actual de una renta fraccionada pospagable se obtiene al multiplicar el factor $\frac{i}{j_{(m)}}$ por el valor actual de la renta correspondiente entera pospagable.

El valor final de la renta fraccionada verifica:

$$V_f^{(m)} = V_a^{(m)}(1+i)^n = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_f$$

8.2.2. Renta fraccionada, inmediata, temporal y prepagable

En este caso los términos vencen al principio de cada subperíodo. Por tanto, la renta prepagable sólo se diferencia de la renta pospagable en que los términos vencen un subperíodo de amplitud $1/m$ antes, tal y como se puede observar en los siguientes gráficos:

Renta prepagable:

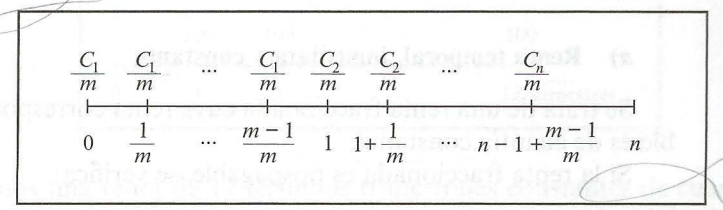


Figura 8.5.

Renta pospagable:

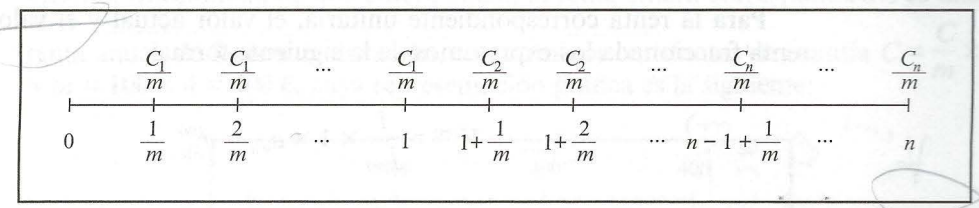


Figura 8.6.

© Ediciones Pirámide

Por tanto, podemos obtener el valor actual de la renta fraccionada prepagable capitalizando al tanto del subperíodo $i^{(m)}$ el valor actual de la renta pospagable:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = V_a^{(m)} \times (1 + i^{(m)})$$

En cuanto al valor final, tenemos:

$$\ddot{V}_f^{(m)} = V_f^{(m)} \times (1 + i^{(m)})$$

8.2.3. Casos particulares

Tal y como hemos señalado, el valor actual de la una renta fraccionada viene dado por la expresión:

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times \sum_{s=1}^{n} C_s(1 + i)^{-s} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

Dependiendo de la modalidad de la renta entera correspondiente, tenemos distintos casos particulares; calcularemos su valor actual y final de acuerdo con las expresiones analizadas en las lecciones anteriores.

a) Renta temporal, inmediata y constante

Se trata de una renta fraccionada cuya renta correspondiente entera pospagable es de cuantía constante.

Si la renta fraccionada es pospagable, se verifica:

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i}$$

$$V_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_f = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times s_{\overline{n}|i}$$

Para la renta correspondiente unitaria, el valor actual y el valor final de la renta fraccionada los expresamos de la siguiente forma:

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times 1 \times a_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

$$V_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times 1 \times s_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}^{(m)}$$

© Ediciones Pirámide

Si la renta fraccionada es prepagable, tenemos:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a \times (1 + i^{(m)}) = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)})$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_f \times (1 + i^{(m)}) = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times s_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)})$$

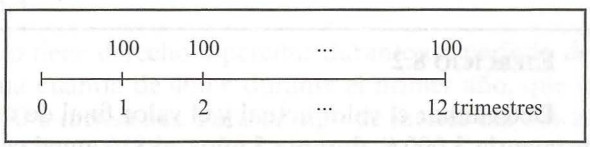
EJERCICIO 8.1

Sea una renta de 100 € trimestrales pospagables, de 3 años de duración, valorada al 4,04% anual. Determinar el valor actual de esta renta, considerándola como: *a*) entera trimestral; *b*) trimestral fraccionada de una renta entera anual, y *c*) trimestral fraccionada de una renta entera semestral.

Resolución

Vamos a determinar el valor actual para los tres apartados señalados, y comprobaremos que el resultado ha de ser el mismo.

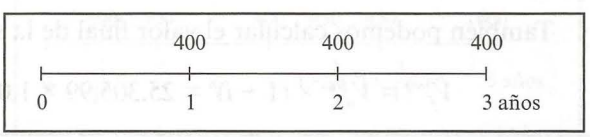
a) Si consideramos esta renta como una renta entera trimestral, temporal, inmediata y pospagable, podemos representarla gráficamente como:



Tenemos una renta de 12 términos trimestrales constantes de cuantía 100 €, siendo el tipo de interés trimestral equivalente al 4,04% anual, el 0,9950494%. Por lo que el valor actual de esta renta verifica: $V_0 = C \times a_{\overline{n}|i}$, y sustituyendo:

$$V_0 = 100 \times a_{\overline{12}|0,009950494} = 1.125,86 \text{ €}$$

b) Si la consideramos como una renta temporal, inmediata, pospagable, trimestral, fraccionada de una entera anual, la renta entera correspondiente es una renta anual, de 3 años de duración, con términos constantes de cuantía $C = \frac{C}{m} \times$ $\times m = 100 \times 4 = 400$ €, cuya representación gráfica es la siguiente:

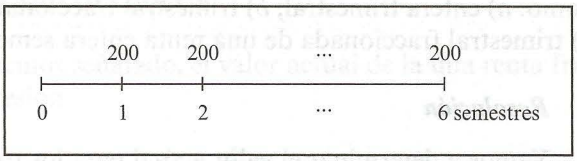


© Ediciones Pirámide

El valor actual de la renta fraccionada verifica: $V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i}$, y sustituyendo:

$$V_a^{(m)} = \frac{0{,}0404}{4 \times 0{,}009950494} \times 400 \times a_{\overline{3}|4{,}04\%} = 1.125{,}86\ €$$

c) Si la consideramos como una renta temporal, inmediata, pospagable, trimestral, fraccionada de una entera semestral, la renta entera correspondiente es una semestral, de 6 semestres de duración, con términos constantes de cuantía $C = \frac{C}{m} \times m = 100 \times 2 = 200\ €$, cuya representación gráfica es la siguiente:



El valor actual de la renta fraccionada verifica:

$$V_a^{(m)} = \frac{0{,}02}{2 \times 0{,}009950494} \times 200 \times a_{\overline{6}|2\%} = 1.125{,}86\ €$$

EJERCICIO 8.2

Determinar el valor actual y el valor final de una renta semestral prepagable, de cuantía 3.000 €, durante 5 años, al 8% anual capitalizable semestralmente.

Resolución

Considerándola como fraccionada de una anual, y teniendo en cuenta que el tipo de interés de valoración es el 4% semestral, cuyo equivalente anual es el 8,16%, el valor actual y el final verifican:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times a_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)}) = \frac{0{,}0816}{0{,}08} \times 3.000 \times 2 \times a_{\overline{5}|8{,}16\%} \times 1{,}04 = 25.305{,}99\ €$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times C \times s_{\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)}) = \frac{0{,}0816}{0{,}08} \times 3.000 \times 2 \times s_{\overline{5}|8{,}16\%} \times 1{,}04 = 37.459{,}05\ €$$

También podemos calcular el valor final de la siguiente forma:

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_a^{(m)} \times (1 + i)^n = 25.305{,}99 \times 1{,}0816^5 = 37.459{,}05\ €$$

© Ediciones Pirámide

b) Renta temporal, inmediata y de términos variables en progresión aritmética

Se trata de una renta fraccionada, cuya renta correspondiente entera pospagable es de términos variables en progresión aritmética.

Si la renta fraccionada es pospagable, tenemos:

$$V_a^{(m)} = A^{(m)}_{(c_1,\, d)\,\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\, d)\,\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}}\left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right]$$

$$V_f^{(m)} = V_a^{(m)}(1 + i)^n$$

Si la renta fraccionada es prepagable, se tiene:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \ddot{A}^{(m)}_{(c_1,\, d)\,\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\, d)\,\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)}) = \frac{i}{j_{(m)}}\left[\left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}\right](1 + i^{(m)})$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_a^{(m)} \times (1 + i)^n$$

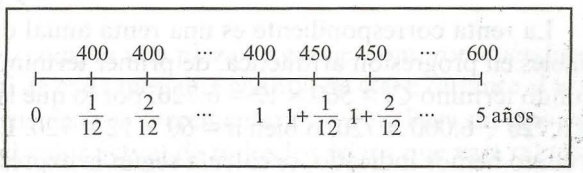
EJERCICIO 8.3

Un individuo tiene derecho a percibir durante un período de 5 años, al final de cada mes, una cuantía de 400 € durante el primer año, que se incrementa de año en año en 50 € mensuales. Para un tipo de interés del 3% anual, calcular el valor actual de todos los cobros que va a recibir.

Resolución

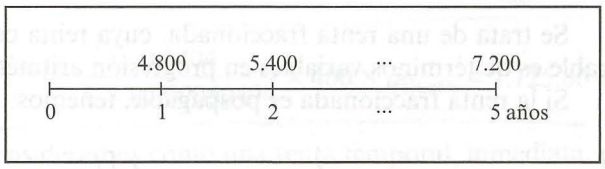
Tenemos una renta temporal, pospagable, con términos mensuales de cuantía constante dentro de cada año, pero que se incrementa de año en año en 50 € mensuales. Se trata de una renta mensual fraccionada, cuya renta correspondiente es una renta anual de 5 términos variables en progresión aritmética, de primer término $C_1 = 400 \times 12 = 4.800$; de segundo término $C_2 = 450 \times 12 = 5.400$, por lo que la razón es: $d = C_2 - C_1 = 5.400 - 4.800 = 600$, o bien $d = 50 \times 12 = 600$.

Gráficamente, podemos expresar la renta como:



© Ediciones Pirámide

Podemos representar gráficamente la renta correspondiente como:



Para calcular el valor actual según la expresión ya señalada, hemos de calcular el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 3% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,246627%. Por lo que sustituyendo, tenemos que:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{0{,}03}{12 \times 0{,}00246627}\left[\left(4.800 + 600 \times 5 + \frac{600}{0{,}03}\right)a_{\overline{5}|0{,}03} - \frac{600 \times 5}{0{,}03}\right] =$$

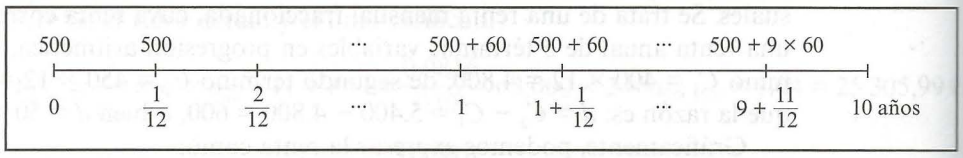
$$= 27{,}689{,}45\ €$$

EJERCICIO 8.4

Un inversor tiene derecho a percibir durante 10 años, al principio de cada mes, una cuantía de 500 € durante el primer año, que se incrementa anualmente en 60 € mensuales. Para un tipo de interés del 3% anual, calcular el valor actual de todos los cobros a recibir, así como su valor final.

Resolución

Tenemos una renta temporal, prepagable, con términos mensuales de cuantía constante dentro de cada año, que anualmente varían en progresión aritmética. Se trata de una renta mensual fraccionada de una anual. Gráficamente podemos expresar la renta como:



La renta correspondiente es una renta anual de 10 términos pospagables variables en progresión aritmética, de primer término $C_1 = 500 \times 12 = 6.000$; de segundo término $C_2 = 560 \times 12 = 6.720$, por lo que la razón es igual a $d = C_2 - C_1 = 6.720 - 6.000 = 720$, o bien $d = 60 \times 12 = 720$. El valor actual de esta renta, tal y como hemos indicado, se calcula según la expresión: $\ddot{V}_a^{(m)} = V_a^{(m)}(1 + i^{(m)})$. Para

© Ediciones Pirámide

ello hemos de calcular el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 3% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,246627%. Por lo que, sustituyendo, tenemos que:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \frac{0{,}03}{12 \times 0{,}00246627}\left[\left(6.000 + 720 \times 10 + \frac{720}{0{,}03}\right)a_{\overline{10}|0{,}03} - \frac{720 \times 10}{0{,}03}\right] \times$$

$$\times\ 1{,}00246627 = 78.574{,}37\ €$$

El valor final de la renta o valor al final del año 10 es:

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_{10}^{(m)} = 78.574{,}37 \times 1{,}03^{10} = 105.597{,}38\ €$$

---

c) Renta temporal, inmediata y de términos variables en progresión geométrica

Se trata de una renta fraccionada cuya renta correspondiente entera pospagables es de términos variables en progresión geométrica.

Si la renta fraccionada es pospagable, tenemos:

$$V_a^{(m)} = A^{(m)}_{(c_1,\,q)\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\,q)\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}}\left[C_1 \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1 + i - q}\right]$$

Para el caso particular de $q = 1 + i$, se verifica: $V_a^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times \frac{C_1 \times n}{1 + i}$

En cualquier caso, podemos obtener el valor final a través de la expresión: $V_f^{(m)} = V_a^{(m)} \times (1 + i)^n$.

Para la prepagable, se tiene:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = \ddot{A}^{(m)}_{(c_1,\,q)\overline{n}|i} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\,q)\overline{n}|i} \times (1 + i^{(m)})$$

$$\ddot{V}_f^{(m)} = \ddot{V}_a^{(m)} \times (1 + i)^n$$

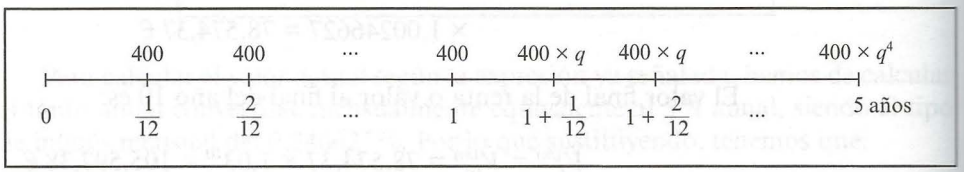
EJERCICIO 8.5

Un individuo compra una plaza de garaje, comprometiéndose a pagar durante 5 años, al final de cada mes, una cuantía de 400 € durante el primer año, y cada año el importe mensual se incrementará un 5%. Para un tipo de interés del 3% anual, calcular el valor actual de todos los pagos que va a realizar.

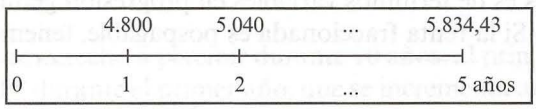
© Ediciones Pirámide

Resolución

Tenemos una renta temporal, pospagable, con términos mensuales de cuantía constante dentro de cada año, que anualmente varía en progresión geométrica. Se trata, pues, de una renta mensual fraccionada de una anual. Gráficamente, tenemos:



La renta correspondiente es una renta anual de 5 términos variables en progresión geométrica, de primer término $C_1 = 400 \times 12 = 4.800$; de segundo término $C_2 = 400 \times 1{,}05 \times 12 = 5.040$, por lo que la razón es igual a $q = \frac{C_2}{C_1} = \frac{5.040}{4.800} = 1{,}05$. Su representación gráfica es la siguiente:



Para calcular el valor actual, determinamos previamente el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 3% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,246627%. Por lo que, sustituyendo, tenemos:

$$V_a^{(m)} = \frac{0{,}03}{12 \times 0{,}00246627}\left[4.800\frac{1 - 1{,}05^5(1{,}03)^{-5}}{1{,}03 - 1{,}05}\right] = 24.554{,}90\ €$$

EJERCICIO 8.6

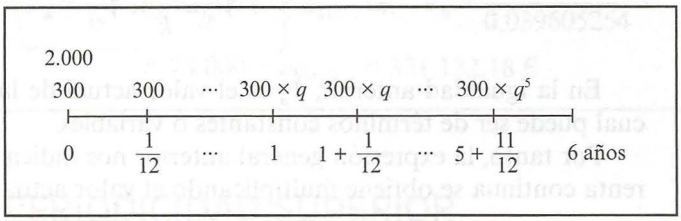
Un individuo adquiere un coche, comprometiéndose a pagar 2.000 € al contado y el resto a lo largo de 6 años, mediante cuantías constantes prepagables mensuales de 300 € durante el primer año, que se incrementan anualmente un 10%. Calcular el valor actual de todos los pagos que va a realizar, si el tipo de interés es del 5% anual.

Resolución

El valor actual de todos los pagos a realizar lo obtenemos a través de la suma de la cantidad entregada como entrada en el momento inicial y el valor actual de

© Ediciones Pirámide

una renta prepagable, con términos mensuales constantes que anualmente varían en progresión geométrica, tratándose, pues, de una renta mensual fraccionada de una anual. Gráficamente, tenemos:



Hemos de calcular el tanto anual convertible mensualmente equivalente al 5% anual, siendo el tipo de interés mensual del 0,4074124%. El valor actual de toda la operación, tal y como hemos indicado, verifica:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = 2.000 + \frac{0{,}05}{12 \times 0{,}004074124}\left[300 \times 12\frac{1 - 1{,}1^6 \times 1{,}05^{-6}}{1{,}05 - 1{,}1}\right] \times$$

$$\times\ 1{,}004074124 = 25.804{,}71\ €$$

8.3. RENTAS CONTINUAS

De acuerdo con la clasificación de las rentas, teniendo en cuenta la medida o amplitud de los intervalos, hemos señalado que las **rentas continuas** son aquellas en las que la medida de los subintervalos en los que vencen los términos es infinitésima, es decir, tiende a cero. Por tanto, cuando en las rentas fraccionadas o de frecuencia m, el número de fraccionamientos tiende a infinito, tenemos las rentas continuas.

En este epígrafe analizaremos las rentas continuas derivadas de las rentas fraccionadas con fraccionamiento uniforme.

8.3.1. Renta continua pospagable

Podemos calcular el valor actual de esta renta como el límite cuando $m \to \infty$ de la renta fraccionada; expresando ésta en función de la renta entera correspondiente, queda:

$$\bar{V}_a = \lim_{m\to\infty} V_a^{(m)} = \lim_{m\to\infty} \frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

© Ediciones Pirámide

Teniendo en cuenta que en capitalización compuesta el $\lim_{m\to\infty} j_{(m)}$ coincide con el tanto instantáneo de capitalización, es decir, $\lim_{m\to\infty} j_{(m)} = log_e(1 + i) = k$, se verifica:

$$\bar{V}_a = \frac{i}{k} \times V_a$$

En la igualdad anterior, V_a es el valor actual de la renta correspondiente, la cual puede ser de términos constantes o variables.

Por tanto, la expresión general anterior nos indica que el valor actual de una renta continua se obtiene multiplicando el valor actual de la renta entera pospagable correspondiente por el factor $\frac{i}{k}$.

8.3.2. Renta continua prepagable

La relación entre el valor actual de una renta fraccionada prepagable y el de una pospagable, verifica:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = V_a^{(m)}(1 + i^{(m)}) = V_a^{(m)}(1 + i)^{1/m} = (1 + i)^{1/m}\frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

En consecuencia, el valor actual de una renta continua prepagable lo obtenemos como:

$$\bar{\ddot{V}}_a = \lim_{m\to\infty} \ddot{V}_a^{(m)} = \lim_{m\to\infty} (1 + i)^{1/m}\frac{i}{j_{(m)}} \times V_a$$

Siendo $\lim_{m\to\infty} (1 + i)^{1/m} = (1 + i)^0 = 1$, tenemos: $\bar{\ddot{V}}_a = \frac{i}{k} \times V_a = \bar{V}_a$. Por consiguiente, en las rentas continuas coincide el valor actual de la renta pospagable y el de la prepagable.

EJERCICIO 8.7

Calcular el valor actual de una renta diaria de 200 € de 5 años de duración, valorada al 4,04% anual.

Resolución

En la práctica, una renta diaria puede considerarse como una renta continua. Si consideramos la renta correspondiente anual, tenemos una renta constante de

© Ediciones Pirámide

5 años de duración, cuyos términos son de importe $C = 200 \times 365 = 73.000$ €, siendo el tanto instantáneo anual $k = log_e(1 + 0{,}0404) = 0{,}039605254$, verificándose:

$$\overline{V}_a = \frac{i}{k} \times V_a = \frac{i}{k} \times C \times a_{\overline{n}|i} \Rightarrow \overline{V}_0 = \frac{0{,}0404}{0{,}039605254} \times$$

$$\times 73.000 \times a_{\overline{5}|4{,}04\%} = 331.132{,}18 \text{ €}$$

8.4. RENTAS DE PERIODICIDAD SUPERIOR A LA UNIDAD DE TIEMPO

En este apartado analizamos las rentas cuya periodicidad es superior a la unidad de tiempo que tomemos. Partimos de una renta temporal de n términos, inmediata, pospagable, de período uniforme, con términos constantes de cuantía C que vencen cada t períodos, cuya representación gráfica es la siguiente:

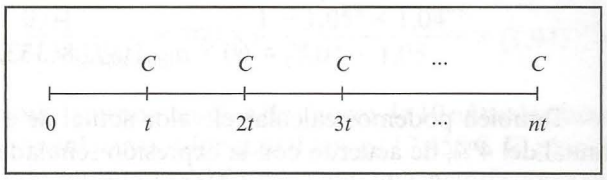


Figura 8.7.

El valor actual de esta renta, al tipo de interés i' de periodicidad t períodos, es el siguiente:

$$V_0 = C \times a_{\overline{n}|i'}$$

Vamos a deducir una expresión analítica para la citada renta cuyos términos vencen cada t años, en función del tipo de interés anual, sabiendo que se verifica: $(1 + i)^t = 1 + i'$. De manera que, desarrollando y sustituyendo en la ecuación anterior, se verifica:

$$V_0 = C \times a_{\overline{n}|i'} = C\frac{1 - (1 + i')^{-n}}{i'} = C\frac{1 - (1 + i)^{-t \times n}}{(1 + i)^t - 1} = C\frac{i}{(1 + i)^t - 1} \times$$

$$\times \frac{1 - (1 + i)^{-t \times n}}{i} = \frac{C}{s_{\overline{t}|i}} \times a_{\overline{nt}|i}$$

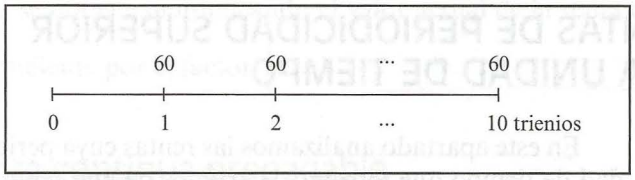
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 8.8

Calcular el valor actual de una renta pospagable de 10 términos trienales de 60 €, siendo el tipo de interés de valoración el 4% anual.

Resolución

Gráficamente, tenemos la siguiente renta:



Podemos calcular el valor actual, considerando una renta de 10 términos trienales pospagables valorados al tipo de interés trienal del 12,4864% equivalente al 4% anual dado. Por lo que se verifica:

$$V_0 = 60 \times a_{\overline{10}|12,4864\%} = 332,37 \text{ €}$$

También podemos calcular el valor actual de esta renta, valorándola al tipo anual del 4%, de acuerdo con la expresión señalada, verificándose:

$$V_0 = \frac{60}{s_{\overline{3}|4\%}} a_{\overline{10\times 3}|4\%} = 332,37 \text{ €}$$

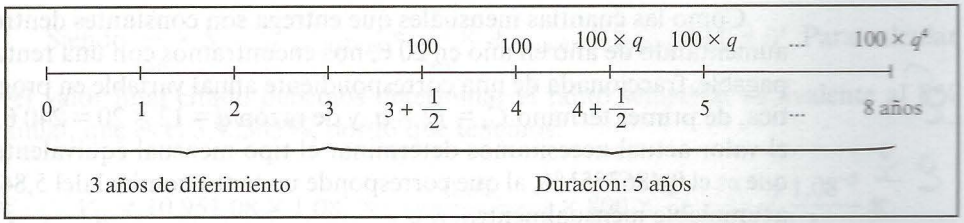
8.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Calcular el valor actual y el valor final de una renta pospagable, de 5 años de duración, diferida en 3 años, con términos semestrales constantes dentro de cada año que aumentan de año en año un 5%, siendo la cuantía de cada uno de los términos semestrales del primer año de 100 € y el tipo de interés el 4% anual.

Resolución

Tenemos una renta diferida, pospagable, semestral, fraccionada de una anual con términos variables en progresión geométrica. Su representación gráfica es la siguiente:

© Ediciones Pirámide



El valor actual de esta renta, tal y como hemos indicado, se calcula a través de la expresión:

$$V_0^{(m)} = \frac{i}{j_{(m)}} \times V_3(1+i)^{-3} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(c_1,\,q)\overline{n}|i}(1+i)^{-3} = \frac{i}{j_{(m)}} C_1 \frac{1-q^n-(1+i)^{-n}}{1+i-q}(1+i)^{-3}$$

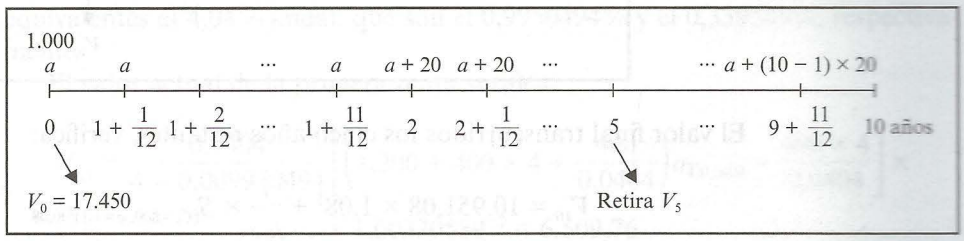
La renta correspondiente es una renta anual de 5 términos variables en progresión geométrica, de primer término $C_1 = 100 \times 2 = 200$ €, de razón $q = 1{,}05$. Hemos de calcular el tanto anual convertible semestralmente equivalente al 4% anual, siendo el tipo de interés semestral del 1,9803903%. Por lo que, sustituyendo, tenemos que:

$$V_0^{(m)} = \frac{0{,}04}{2 \times 0{,}019803903} \times 200 \times \frac{1-1{,}05^5 \times 1{,}04^{-5}}{1{,}04-1{,}05} \times (1{,}04)^{-3} = 880{,}03\ €$$

2. Una persona contrata un plan de ahorro de 10 años de duración, a un tipo de interés del 6% anual, cuyo valor actual hoy es 17.450 €. El plan de ahorro consiste en depositar de entrada 1.000 € y cada año una cuantía constante al principio de cada mes. Cada año la cuantía mensual aumenta en 20 €. Al final del quinto año decide retirar el montante constituido hasta ese momento y depositarlo en otra entidad, a un tipo de interés del 8% anual durante 5 años, entregando también una cuantía de 400 € al final de cada semestre de ese año, la cual aumentará anualmente un 10%. Calcular la cuantía que tendrá ahorrada al cabo de los 10 años desde el origen de la operación inicial.

Resolución

El gráfico del plan de ahorro inicial es:



© Ediciones Pirámide

Como las cuantías mensuales que entrega son constantes dentro de cada año, aumentando de año en año en 20 €, nos encontramos con una renta mensual prepagable, fraccionada de una correspondiente anual variable en progresión aritmética, de primer término $C_1 = 12 \times a$, y de razón $d = 12 \times 20 = 240$ €. Para calcular el valor actual necesitamos determinar el tipo mensual equivalente al 6% anual, que es el 0,4867551%, al que corresponde un tanto nominal del 5,8410612% anual acumulable mensualmente.

El valor actual verifica:

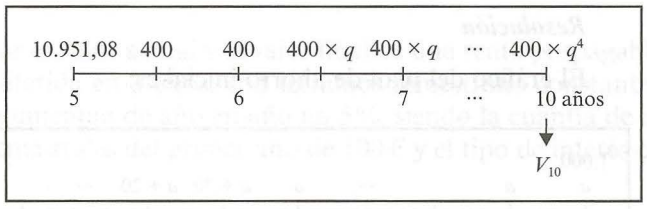
$$V_0 = 17.450 = 1.000 + \frac{0,06}{0,058410612}\left[\left(C_1 + 240 \times 10 + \frac{240}{0,06}\right)a_{\overline{10}|0,06} - \frac{240 \times 10}{0,06}\right] \times \\ \times 1,004867551$$

Despejando obtenemos el valor de $C_1 = 1.200$, por lo que cada imposición mensual prepagable del primer año fue de 100 €.

Al cabo de 5 años decide rescindir la operación, de manera que el montante constituido hasta ese momento lo podemos calcular como el valor final de las imposiciones realizadas durante tales años, o sea, el valor final del depósito inicial y el valor final de una renta fraccionada mensual prepagable, cuya correspondiente anual pospagable consta de 5 términos variables en progresión aritmética, siendo el primero $C_1 = 1.200$, y la razón $d = 12 \times 20 = 240$, verificándose:

$$V_5 = \left\{1.000 + \frac{0,06}{0,058410612}\left[\left(1.200 + 240 \times 5 + \frac{240}{0,06}\right)a_{\overline{5}|0,06} - \frac{240 \times 5}{0,06}\right] \times \right. \\ \left. 1,004867551\right\} \times 1,06^5 = 10.951,08$$

Dicho montante lo deposita en otra entidad, junto a una renta semestral pospagable, fraccionada de una anual variable en progresión geométrica, de primer término 800 y razón $q = 1,1$, cuyo gráfico es:



El valor final transcurridos los cinco años restantes, verifica:

$$V_{10} = 10.951,08 \times 1,08^5 + \frac{i}{j_{(m)}} \times S_{(C_1 = 800,\ q = 1,1)\overline{5}|0,08}$$

© Ediciones Pirámide

Siendo $\frac{i}{j_{(m)}} \times S_{(C_1=800,\ q=1{,}1)\overline{5}|0{,}08} = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(C_1=800,\ q=1{,}1)\overline{5}|0{,}08} \times (1+i)^n$. Para calcular el valor final citado debemos determinar el tanto semestral equivalente al 8% anual, que es el 3,92305%, por lo que tenemos:

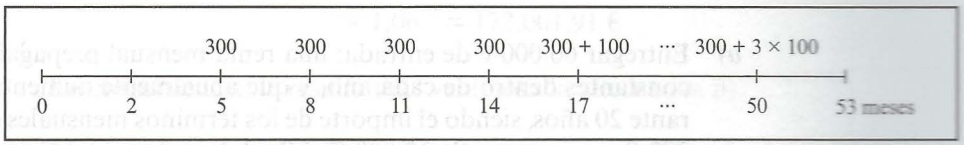
$$V_{10} = 10.951{,}08 \times 1{,}08^5 = \frac{0{,}08}{2 \times 0{,}0392305} \times 800 \times \frac{1 - 1{,}1^5 \times 1{,}08^{-5}}{1{,}08 - 1{,}1} \times$$

$$\times\ 1{,}08^5 = 21.848{,}78\ €$$

3. Una persona acepta en concepto de herencia recibir las siguientes rentas. A los 5 meses desde la aceptación de la herencia comienza a recibir durante los cuatro años siguientes cuantías trimestrales constantes cada año que aumentan de año en año en 100 €. El importe de las cuantías trimestrales del primer año ascienden a 300 €. Seis meses después de recibir la última cuantía trimestral, comienza a recibir cuantías mensuales que crecen un 10% semestralmente, durante 5 años. La cuantía constante mensual del primer semestre es de 500 €. Calcular el valor actual de la herencia para un tipo de interés del 4,04% anual.

Resolución

El valor actual de la herencia lo obtenemos como suma del valor actual de dos rentas. Vamos a calcular el valor actual de cada una de ellas por separado. Podemos representar gráficamente la primera renta:



Podemos valorar esta renta como una renta trimestral fraccionada de una anual variable en progresión aritmética, pospagable y diferida 2 meses, o bien como una prepagable diferida 5 meses. En cualquier caso, la renta correspondiente tiene como primer término $C_1 = 300 \times 4 = 1.200$, y razón $d = 100 \times 4 = 400$. Para calcular el valor actual necesitamos calcular los tipos trimestral y mensual equivalentes al 4,04% anual, que son el 0,9950494% y el 0,330589%, respectivamente.

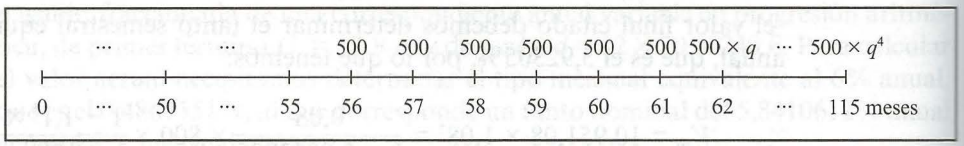
El valor actual de la primera renta verifica:

$$V_{0,1} = \frac{0{,}0404}{4 \times 0{,}009950494}\left[\left(1.200 + 400 \times 4 + \frac{400}{0{,}0404}\right) a_{\overline{4}|0{,}0404} - \frac{400 \times 4}{0{,}0404}\right] \times$$

$$\times\ 1{,}00330589^{-2} = 6.509{,}76$$

© Ediciones Pirámide

Podemos representar gráficamente la segunda renta:



Podemos valorar esta renta como una renta mensual fraccionada de una semestral variable en progresión geométrica, pospagable y diferida 55 meses, cuya renta correspondiente es semestral y su primer término es $C_1 = 500 \times 6 = 3.000$, y la razón $d = 1{,}1$. Para calcular el valor actual necesitamos calcular el tipo semestral equivalente al 4,04% anual, que es el 2%.

El valor actual de la segunda renta verifica:

$$V_{0,2} = \frac{0{,}02}{6 \times 0{,}00330589} \times 3.000 \times \frac{1 - 1{,}1^{10} \times 1{,}02^{-10}}{1{,}02 - 1{,}1} \times 1{,}00330589^{-55} = 35.563{,}80$$

De modo que el valor actual total de la herencia es la suma de los valores actuales de las dos rentas anteriores; por tanto:

$$V_0 = 6.509{,}76 + 35.563{,}80 = 42.073{,}56 \text{ €}$$

4. Una persona va a financiar la compra de una vivienda y le ofrecen dos alternativas:

a) Entregar 60.000 € de entrada; una renta mensual prepagable de cuantías constantes dentro de cada año, y que anualmente aumentan un 3%, durante 20 años, siendo el importe de los términos mensuales del primer año 500 €, y una renta de 10.000 € al final de cada uno de los cinco primeros años de la operación.

b) Entregar 40.000 € de entrada; 40.000 € dentro de dos años; y el resto abonando durante 15 años, y comenzando en el año 3, cuantías mensuales pospagables de 200 € durante el primer semestre de dicho año, las cuales van aumentando por períodos semestrales a razón de un 10%.

Calcular qué alternativa le interesa al comprador, siendo el tipo de interés del 6% anual.

Resolución

Para ver qué alternativa resulta más conveniente, es preciso determinar el valor actual del conjunto de pagos de cada una. Así, la alternativa *a*) supone un

© Ediciones Pirámide

pago inicial de 60.000 €, más el valor actual de una renta mensual prepagable, fraccionada de una anual, de términos variables en progresión geométrica de razón 1,03 durante 20 años, y una renta anual de 10.000 € durante 5 años.

Teniendo en cuenta que el tipo de interés mensual equivalente al 6% anual es el 0,4867551%, el valor actual de todos los capitales de esta alternativa es:

$$V_{o,a} = 60.000 + \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(C_1 = 500 \times 12,\ q = 1,03)\overline{20}|6\%} \times (1 + i^{(m)}) + 10.000 \times a_{\overline{5}|6\%} =$$

$$= 60.000 + \frac{0,06}{12 \times 0,004867551} \times 500 \times 12 \frac{1 - 1,03^{20} \times 1,06^{-20}}{1,06 - 1,03} \times 1,004867551 +$$

$$+ 10.000 \times a_{\overline{5}|6\%} = 192.307,05\ €$$

La alternativa *b*) consta del valor actual de dos pagos de 40.000 €, más el valor actual de una renta diferida en 2 años, mensual y pospagable, fraccionada de una semestral variable en progresión geométrica de razón 1,1 y de duración 30 semestres. Para calcular el valor actual de dicha renta es preciso determinar el tipo de interés semestral y el mensual equivalentes al 6% anual, los cuales son, respectivamente, 2,9563014% y 0,4867551%. En consecuencia, el valor actual de todos los capitales de la alternativa *b*) es:

$$V_{o,b} = 40.000 + 40.000 \times 1,06^{-2} + \frac{i^{(m)}}{j_{(k)}} \times A_{(C_1 = 200 \times 6,\ q = 1,1)\overline{30}|i^{(m)} = 2,9563014\%} \times 1,06^{-2} =$$

$$= 75.599,86 + \frac{0,029563014}{6 \times 0,004867551} \times 200 \times 6 \frac{1 - 1,1^{30} \times 1,029563014^{-30}}{1,029563014 - 1,1} \times$$

$$\times 1,06^{-2} = 172.001,91\ €$$

En consecuencia, le resulta más ventajosa la alternativa *b*).

5. A una persona le ofrecen dos alternativas para financiar la ortodoncia de su hijo:

a) Pagar 100 € al final de cada mes durante el primer año, aumentando cada año dicha cuantía mensual en 30 €, durante 4 años.

b) Empezar a pagar dentro de 3 meses 250 € bimestrales, que anualmente aumentan en un 5%, durante 4 años.

Determinar qué alternativa le interesa más si el tipo de interés es el 5 % anual.

Resolución

Para ver qué alternativa resulta más conveniente, es preciso determinar el valor actual del conjunto de pagos de cada una.

© Ediciones Pirámide

En la alternativa *a*) calculamos el valor actual de una renta pospagable mensual, fraccionada de una anual, cuya renta correspondiente es de cuatro términos variables en progresión aritmética de razón $d = 30 \times 12 = 360$. El tipo de interés mensual equivalente al 5% anual es el 0,4074124%. El valor actual verifica:

$$V_0 = \frac{0{,}05}{12 \times 0{,}004074124}\left[\left(1.200 + 360 \times 4 + \frac{360}{0{,}05}\right)a_{\overline{4}|5\%} - \frac{360 \times 4}{0{,}05}\right] = 6.230{,}53\ €$$

En la alternativa *b*) tenemos una renta pospagable bimestral, fraccionada de una anual, cuya renta correspondiente es una de cuatro términos variables en progresión geométrica, de razón $q = 1 + i = 1{,}05$, diferida 1 mes. El tipo de interés bimestral equivalente al 5% anual es el 0,8164846%. El valor actual verifica:

$$V_0 = \frac{0{,}05}{6 \times 0{,}008164846} \times \frac{250 \times 6 \times 4}{1{,}05} \times 1{,}004074124^{-1} = 5.808{,}54\ €$$

Por tanto, le interesa más la alternativa *b*), al ser su valor actual menor.

6. Un padre, al nacer su hijo, con el objetivo de disponer de un capital para pagar sus estudios universitarios, decide comenzar a imponer cuantías constantes al final de cada trimestre, las cuales irán aumentando en 100 € cada dos años. De este modo, la cuantía de cada trimestre de los dos primeros años es de 300 €, la cuantía de cada trimestre de los dos siguientes años es de 400 €, y así sucesivamente. Calcular el valor del capital que dispondrá cuando el hijo cumpla 18 años, para un tipo de interés del 5% anual.

Resolución

Las imposiciones constituyen una renta trimestral pospagable, fraccionada de una bienal variable en progresión aritmética. La renta correspondiente es una bienal de 9 términos. La cuantía del primer término es $C_1 = 300 \times 8 = 2.400$, y la razón vale $d = 100 \times 8 = 800$. Los tipos de interés a utilizar son: el 10,25% bienal y el 1,2272234% trimestral, equivalentes al 5% anual. Además, el tanto bienal acumulable trimestralmente es $j_{(m)} = 8 \times 0{,}012272234 = 0{,}098177872$.

El valor final al cabo de 18 años (9 bienios) verifica:

$$V_{18} = A^{(m)}_{(c_1 = 2.400,\ d = 800)\overline{9}|10{,}25\%} \times 1{,}05^{18} =$$

$$= \frac{0{,}1025}{0{,}098177872}\left[\left(2.400 + 800 \times 9 + \frac{800}{0{,}1025}\right)a_{\overline{9}|10{,}25\%} - \frac{800 \times 9}{0{,}1025}\right] \times 1{,}05^{18}$$

Al realizar operaciones, se obtiene 72.871,59 €.

© Ediciones Pirámide

8.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular el valor actual y el valor al final del año 20, para un tipo de interés del 6% anual, de una renta prepagable de términos cuatrimestrales de 15 años de duración. Los términos son constantes dentro de cada año, incrementándose de un año a otro en un 4%, siendo el término cuatrimestral del tercer año igual a 32.448 €.

2. Sea una renta prepagable de 8 años de duración, anticipada 7 años y términos trimestrales constantes dentro de cada semestre, variando de semestre en semestre en 30 €. Sabiendo que la cuantía de cada uno de los términos trimestrales del cuarto semestre es 390 € y que el tipo de interés es el 2,5% semestral, calcular el valor actual y el valor final.

3. Una persona impone en cierta entidad financiera un capital de 60.000 € a un tipo de interés del 5% anual durante 10 años. Al cabo de dos años, decide retirar al principio de cada cuatrimestre una cantidad constante dentro de cada año, aumentando dicha cantidad en un 2% anual, retirándose en el primer año 100 € cada cuatrimestre. Calcular el montante del que dispondrá al final de la operación.

4. Una persona recibe en concepto de herencia las siguientes rentas:

a) Una renta de 6 términos de 3.000 € bienales, que comenzará a recibir al año de la aceptación de la herencia.

b) Una renta de cuantías trimestrales constantes cada año, que aumentan de año en año en 100 €, que comenzará a recibir inmediatamente y durante 10 años.

Sabiendo que el valor actual de la herencia en el momento de la aceptación es de 48.193,75 €, calcular el importe de la primera cuantía de la renta trimestral para un tipo de valoración del 4% anual.

5. Una persona alquila una vivienda con un contrato por tiempo indefinido por el que paga 900 € al principio de cada mes durante el primer año, cantidad mensual que aumenta en 100 € de año en año. Determinar, para un tipo de interés del 3,5% anual, cuál sería la cuantía que debería entregar al principio de cada mes del primer año, si las cuantías mensuales constantes de cada año aumentasen un 2% de año en año.

© Ediciones Pirámide

10 Operaciones de amortización de préstamos

OBJETIVOS

- Describir las operaciones de amortización de préstamos y enumerar las modalidades de préstamos, destacando sus características básicas.
- Realizar un planteamiento general del estudio de una operación de préstamo de contraprestación múltiple e intereses vencidos.
- Confeccionar el cuadro de amortización de una operación de préstamo.

SUMARIO

10.1. Concepto.
10.2. Modalidades.
10.3. Estudio general de las operaciones de amortización de préstamos con contraprestación múltiple e intereses vencidos.
10.4. Cuadro de amortización.
10.5. Ejercicios y problemas resueltos.
10.6. Ejercicios y problemas propuestos.

10.1. CONCEPTO

Los **préstamos** son operaciones financieras de amortización en las que un **sujeto denominado prestamista se compromete a entregar un determinado capital (C_0, 0) a otro sujeto denominado prestatario, el cual a su vez se compromete a devolverlo en un período (0, n) y a pagar los intereses que se generen**. Por tanto, podemos decir que amortizar un préstamo implica devolver el capital recibido C_0 y pagar los intereses correspondientes.

De la definición anterior se desprende que en toda operación de préstamo intervienen dos sujetos, prestamista y prestatario:

— El **prestamista** es el acreedor inicial, es decir, la persona que concede el préstamo de cuantía C_0 y, por ello, percibirá a cambio los intereses correspondientes y la devolución de dicho capital.

— El **prestatario** es el deudor inicial, esto es, la persona que recibe el préstamo de cuantía C_0 y a cambio abonará los intereses que se generen y devolverá el capital recibido.

De acuerdo con lo expuesto, en esta operación financiera la prestación está constituida por la cuantía entregada por el prestamista al inicio de la operación, momento 0, y la contraprestación está compuesta por los importes entregados por el prestatario, esto es, la devolución del capital recibido y el pago de los intereses.

Tal y como hemos descrito la operación de préstamo, se trata de una operación pura, ya que las cuantías que un sujeto desembolsa las percibe íntegramente el otro y, además, el deudor abona capitales sólo en concepto de intereses y devolución del principal o cuantía recibida en préstamo.

© Ediciones Pirámide

Sin embargo, cuando, vinculados a la operación pura, existan otros capitales que no correspondan ni a intereses ni a devolución del principal, estaremos ante una operación con características comerciales. Por ejemplo, operaciones de préstamos que conllevan comisiones bancarias, gastos de formalización, impuestos, etc.

10.2. MODALIDADES

En términos generales, las operaciones de préstamo las podemos agrupar en dos grandes bloques: préstamos elementales o simples y préstamos de contraprestación múltiple.

10.2.1. Préstamos elementales o simples

Los préstamos elementales o simples son operaciones financieras en las que tanto la prestación como la contraprestación están integradas por un solo capital. En función del momento del tiempo en el que el prestatario ha de abonar los intereses, podemos distinguir entre préstamos simples con intereses pospagables y préstamos simples con intereses anticipados.

a) Los **préstamos simples con intereses pospagables** son aquellas operaciones de préstamo en las que al final de la operación el prestatario devolverá el capital pactado y abonará los intereses acumulados hasta dicho momento.

Para valorar dicha operación financiera, los sujetos pueden pactar cualquier ley financiera, aunque normalmente utilizan la ley de valoración de capitalización compuesta. En este caso, la operación es:

Prestación: $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación: $\{(C_n, n)\}$

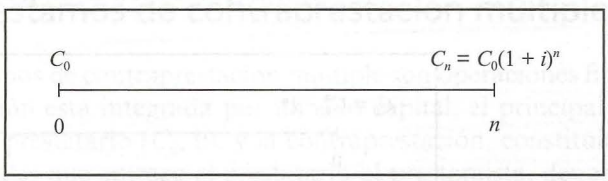


Figura 10.1.

Donde C_0 es el principal o la cuantía nominal del préstamo, C_n el montante que ha de abonar el prestatario al final de la operación, i el tipo de interés unitario y n la duración de la operación, estando n e i expresados en la misma unidad de tiempo.

© Ediciones Pirámide

cedente el tipo de interés utilizado es un tipo pospagable, pero estas operaciones se pactan fijando un tipo de interés prepagable o anticipado i^*. Por tanto, teniendo en cuenta la expresión analizada en la lección 4, $(1 - i^*)(1 + i) = 1$, que relaciona el tanto unitario de capitalización o tipo de interés pospagable i con el tipo unitario de interés prepagable i^*, la ecuación de equivalencia financiera se puede expresar a través del tipo de interés prepagable de la siguiente forma: $C_0 = C_n(1 + i)^{-n} = C_n[(1 - i^*)^{-1}]^{-n} = C_n(1 - i^*)^n$.

El importe total de los intereses prepagables se puede obtener a través de la expresión:

$$I^* = C_n - C_0 = C_n[1 - (1 - i^*)^n]$$

EJERCICIO 10.2

Una persona obtiene un préstamo de 40.000 € con pago de intereses anticipados al 4% anual y duración de 5 años. Si el préstamo se amortiza a través de un único reembolso, calcular la cuantía neta que percibe el prestatario, así como el importe total de los intereses anticipados.

Resolución

Al tratarse de un préstamo con pago anticipado de intereses y amortizable a través de un solo pago, al principio de la operación el sujeto debe abonar todos los intereses de la misma, es decir, el precio financiero total prepagable. Por ello, la cuantía neta que percibe es: $C_0 = 40.000(1 - 0{,}04)^5 = 32.614{,}91$ € La diferencia entre la cuantía neta y el importe nominal del préstamo corresponde al abono del precio financiero total de la operación o intereses anticipados: $I^* = C_0^* - C_0 = 40.000 - 32.614{,}91 = 7.385{,}09$ €

10.2.2. Préstamos de contraprestación múltiple

Los préstamos de contraprestación múltiple son operaciones financieras en las que la prestación está integrada por un solo capital, el principal que entrega el prestamista al prestatario $(C_0, 0)$, y la contraprestación, constituida por un conjunto de capitales que entrega el prestatario al prestamista, denominados términos amortizativos: $\{(a_1, 1); (a_2, 2); \ldots (a_n, n)\}$. La operación queda definida de la siguiente forma:

Prestación: $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación: $\{(a_1, 1); (a_2, 2); \ldots (a_n, n)\}$

© Ediciones Pirámide

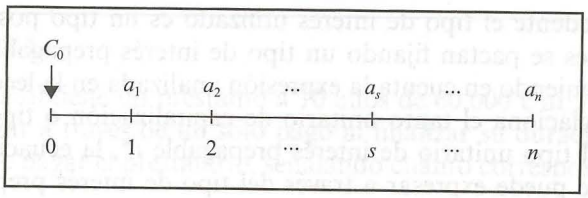


Figura 10.3.

Supongamos, por ejemplo, un préstamo de 30.000 € que se amortiza en 4 años a través de pagos mensuales pospagables de 677,37 €. En este caso, el prestatario recibiría 30.000 € al inicio de la operación y, a cambio de ello, mensualmente pagaría 677,37 € al prestamista durante 4 años, es decir, el prestatario realizaría 48 pagos mensuales de 677,37 €.

De acuerdo con lo expuesto, podemos afirmar que los préstamos de contraprestación múltiple se caracterizan por amortizarse a través de una renta pospagable, cuyos términos son los términos amortizativos. Tales términos tienen como misión la de amortizar o extinguir el préstamo recibido por el prestatario, es decir, devolver al prestamista el capital recibido C_0 y abonarle los intereses devengados.

Una de las principales problemáticas en las operaciones de préstamo es la determinación de la cuantía de los términos amortizativos, pudiéndose distinguir diversos sistemas o métodos de amortización en función de las hipótesis que se tengan en cuenta para su cálculo.

10.3. ESTUDIO GENERAL DE LAS OPERACIONES DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS CON CONTRAPRESTACIÓN MÚLTIPLE E INTERESES VENCIDOS

En este epígrafe analizamos, desde un punto de vista general, las operaciones de préstamos amortizables con contraprestación múltiple e intereses vencidos o pospagables. En concreto, se plantea la ecuación dinámica del capital vivo, la ecuación fundamental de equivalencia financiera, diversas formas de calcular el saldo financiero o capital vivo y el capital total amortizado hasta un determinado momento.

Si partimos de la hipótesis de que el tipo de interés varía de un período a otro, lo podemos expresar gráficamente como aparece en la figura 10.4.

a) Ecuación dinámica del capital vivo

En general, el capital vivo al final de un determinado período, y una vez abonado el término amortizativo correspondiente, es igual al capital vivo al principio

© Ediciones Pirámide

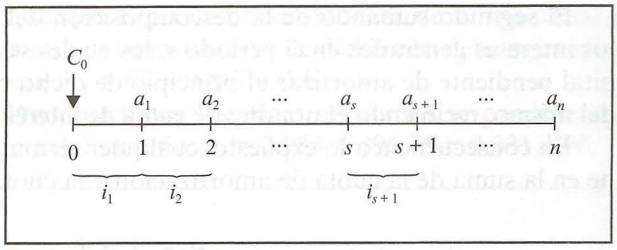


Figura 10.4.

de dicho período, incrementado en los intereses del mismo y disminuido en la cuantía del termino amortizativo que se abone en dicho período. Así, para el primer período el capital vivo al final del mismo será igual a la cuantía inicial del préstamo más los intereses de dicho período y menos el término amortizativo que el prestatario abone en el mencionado período: $C_1 = C_0(1 + i_1) - a_1$. En el segundo período el capital que genera intereses es el que queda pendiente de amortizar al principio del mismo, C_1, por lo que el capital vivo al final del segundo período es $C_2 = C_1(1 + i_2) - a_2$.

El capital pendiente de amortizar C_s o capital vivo al final de un determinado período s, una vez se ha hecho efectivo el término amortizativo de dicho período, se puede calcular a través de la expresión siguiente, que constituye la **ecuación dinámica del capital vivo**:

$$C_s = C_{s-1}(1 + i_s) - a_s$$

El capital vivo C_s también recibe el nombre de saldo financiero o deuda pendiente de amortizar.

Por otro lado, si despejamos de la ecuación dinámica del capital vivo el **término amortizativo**, observamos que dicho término se puede obtener como suma de dos componentes:

$$a_s = (C_{s-1} - C_s) + (C_{s-1} \times i_s)$$

El primer sumando refleja la variación de la deuda, o, lo que es lo mismo, la variación del capital vivo o pendiente de amortizar en el período s, recibiendo el nombre de **cuota de amortización o cuota de capital** del período s: $A_s = C_{s-1} - C_s$.

De acuerdo con la expresión anterior, el capital vivo al final de un determinado período s también lo podemos calcular como el capital vivo al principio de dicho período menos la cuota de amortización del mismo: $C_s = C_{s-1} - A_s$.

Si en una determinada operación de préstamo las cuotas de amortización son positivas o nulas se dice que existe regularidad en la amortización, pues el saldo es decreciente o permanece constante, respectivamente.

© Ediciones Pirámide

El segundo sumando de la descomposición del término amortizativo refleja los intereses generados en el período s, los cuales se obtienen al multiplicar el capital pendiente de amortizar al principio de dicho período por el tipo de interés del mismo, recibiendo el nombre de **cuota de interés** del período s: $I_s = C_{s-1} \times i$.

En consecuencia a lo expuesto, cualquier término amortizativo se descompone en la suma de la cuota de amortización y la cuota de interés:

$$a_s = A_s + I_s$$

EJERCICIO 10.3

El capital vivo de un determinado préstamo al principio del año 8 asciende a 15.000 €. Si el tipo de interés es del 4% anual y en dicho año el prestatario abona una cuantía total de 4.000 €, ¿a cuánto ascenderá la deuda pendiente al principio del año 9?

Resolución

La deuda pendiente al principio del año 9 es el capital vivo al final del año 8, C_8, el cual será igual al capital pendiente de amortizar al principio del año 8 incrementado en los intereses del año 8 y disminuido en la cuantía abonada en dicho año, es decir, en el término amortizativo: $C_8 = 15.000(1 + 0{,}04) - 4.000 = 11.600$ €.

EJERCICIO 10.4

Sea un préstamo de 9.000 € a amortizar en 2 años a un tipo de interés anual del 4% el primer año y del 5% el segundo. Si el término amortizativo del primer año es de 1.425 €, calcular el término amortizativo del segundo año, así como la cuota de interés y la cuota de amortización correspondientes a cada uno de los años.

Resolución

La cuota de interés del año 1 es $I_1 = 9.000 \times 0{,}04 = 360$ € y la cuota de amortización de dicho año la podemos obtener como: $A_1 = a_1 - I_1 = 1.425 - 360 = 1.065$ €.

Con respecto al segundo año, su término amortizativo lo podemos calcular a través de la suma de la cuota de amortización y la cuota de interés de dicho año. Para ello necesitamos hallar previamente la deuda pendiente al final del año 1, la cual se puede obtener restando al principal del préstamo el capital amortizado en el primer año: $C_1 = 9.000 - 1.065 = 7.935$. Por tanto, la cuota de interés del año 2 es: $I_2 = 7.935 \times 0{,}05 = 396{,}75$ €.

© Ediciones Pirámide

Además, dado que el préstamo se amortiza de forma anual y finaliza el segundo año, la cuota de amortización de dicho año debe coincidir con C_1, ya que $C_2 = 0$, por lo que $A_2 = C_1 - 0 = 7.935$ €.

Una vez obtenidos todos los datos necesarios se puede calcular el término amortizativo del segundo año: $a_2 = 7.935 + 396{,}75 = 8.331{,}75$ €.

---

b) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

En un préstamo, como en toda operación financiera, se ha de verificar el postulado de equivalencia financiera, es decir, la equivalencia financiera entre los conjuntos de capitales prestación y contraprestación:

Prestación: $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación: $\{(a_1, 1); (a_2, 2); \ldots (a_n, n)\}$

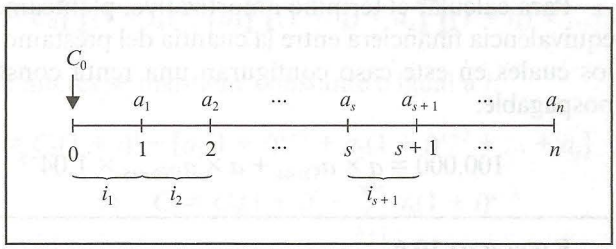


Figura 10.5.

Si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación, se verifica:

$$C_0 = a_1(1 + i_1)^{-1} + a_2\prod_{h=1}^{2}(1 + i_h)^{-1} + \ldots + a_n\prod_{h=1}^{n}(1 + i_h)^{-1}$$

Si valoramos la operación a un tipo de interés constante i, la ecuación de equivalencia financiera en el origen es la siguiente:

$$C_0 = a_1(1 + i)^{-1} + a_2(1 + i)^{-2} + \ldots + a_n(1 + i)^{-n} \Rightarrow C_0 = \prod_{h=1}^{n} a_n(1 + i)^{-h}$$

En cambio, si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el final de la operación, se tiene:

© Ediciones Pirámide

$$C_0\prod_{h=1}^{n}(1+i_h) = a_1\prod_{h=2}^{n}(1+i_h) + a_2\prod_{h=3}^{n}(1+i_h) + \ldots + a_n$$

Valorando la citada operación a un tipo de interés constante i, la ecuación de equivalencia financiera en el final es la siguiente:

$$C_0(1+i)^n = a_1(1+i)^{n-1} + a_2(1+i)^{n-2} + \ldots + a_n \quad \Rightarrow \quad C_0(1+i)^n = \sum_{h=1}^{n} a_h(1+i)^{n-h}$$

EJERCICIO 10.5

Sea un préstamo de 100.000 € a amortizar en 15 años mediante términos amortizativos anuales constantes, a un tipo de interés del 4% anual para los 5 primeros años y del 4,5% anual para los restantes. Calcular la cuantía del término amortizativo.

Resolución

Para calcular el término amortizativo, planteamos en el origen la ecuación de equivalencia financiera entre la cuantía del préstamo y los términos amortizativos, los cuales en este caso configuran una renta constante, temporal, inmediata y pospagable:

$$100.000 = a \times a_{\overline{5}|0,04} + a \times a_{\overline{10}|0,045} \times 1,04^{-5} \quad \Rightarrow \quad a = 9.127,84\ €$$

EJERCICIO 10.6

Un préstamo de 90.000 € se ha de amortizar en 10 años mediante nueve términos amortizativos de 10.000 € cada uno y un término de cuantía desconocida el último año. Calcular la cuantía de dicho término si el tipo de interés fijado es del 4% anual.

Resolución

El último término amortizativo de cuantía X lo podemos hallar planteando en el final, punto 10, la ecuación de equivalencia financiera de la operación de préstamo:

$$90.000 \times 1,04^{10} = 10.000 \times s_{\overline{9}|0,04} \times 1,04 + X \quad \Rightarrow \quad X = 23.160,91\ €$$

---

c) Capital vivo o saldo financiero

Existen diversas formas de calcular el saldo financiero en un determinado momento del tiempo, entre las que cabe destacar las siguientes: método retrospectivo, método prospectivo y método recurrente, las cuales se estudian a continuación.

© Ediciones Pirámide

c.1) *Método retrospectivo*

De acuerdo con lo señalado en la lección 2 al estudiar el saldo financiero, el método retrospectivo implica calcular el saldo como diferencia entre el valor en el punto s de la prestación vencida y el valor en dicho punto de la contraprestación pasada:

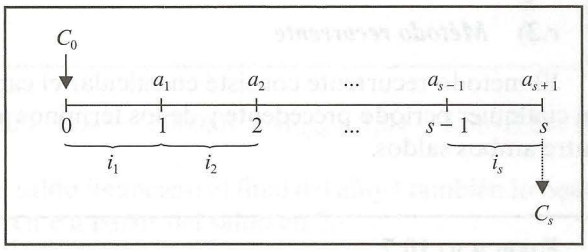


Figura 10.6.

$$C_s = C_0\prod_{h=1}^{s}(1+i_h) - \left[a_1\prod_{h=2}^{s}(1+i_h) + a_2\prod_{h=3}^{s}(1+i_h) + ...+ a_s\right]$$

Si el tipo de interés se mantiene constante e igual a i:

$$C_s = C_0(1+i)^s - [a_1(1+i)^{s-1} + a_2(1+i)^{s-2} + ... + a_s] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s = C_0(1+i)^s - \sum_{h=1}^{s} a_h(1+i)^{s-h}$$

c.2) *Método prospectivo*

Si para calcular la reserva matemática aplicamos el método prospectivo, hallamos el saldo financiero como la diferencia entre el valor en el punto s de la contraprestación futura y el valor en dicho punto de la prestación futura, la cual es nula:

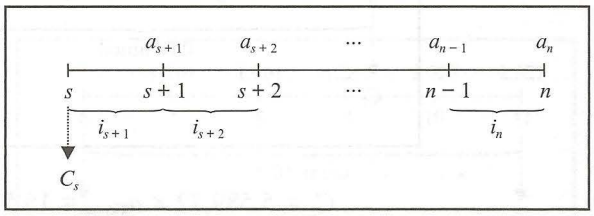


Figura 10.7.

$$C_s = a_{s+1}(1+i_{s+1})^{-1} + a_{s+2}\prod_{h=1}^{2}(1+i_{s+h})^{-1} + ... + a_n\prod_{h=1}^{n-s}(1+i_{s+h})^{-1}$$

© Ediciones Pirámide

Podemos señalar, pues, que el saldo por el método prospectivo es el valor actualizado de los términos amortizativos pendientes de vencimiento.

Si el tipo de interés es constante, tenemos:

$$C_s = a_{s+1}(1+i)^{-1} + a_{s+2}(1+i)^{-2} + \ldots + a_n(1+i)^{-(n-s)} \Rightarrow C_s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1+i)^{-h}$$

c.3) *Método recurrente*

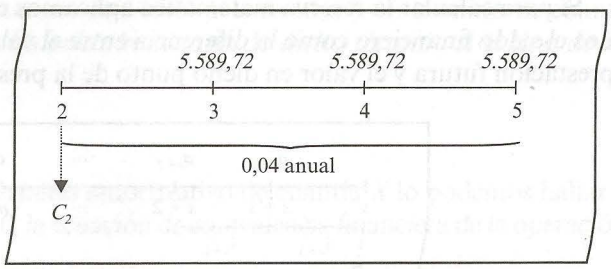
El método recurrente consiste en calcular el capital vivo en función del saldo en cualquier período precedente y de los términos amortizativos con vencimiento entre ambos saldos.

EJERCICIO 10.7

Sea un préstamo de 20.000 € a amortizar en 5 años mediante términos amortizativos de cuantía 3.000,01 € en los dos primeros años y 5.589,72 € en los años restantes. Si el tipo de interés pactado es el 4% anual, calcular el capital vivo al principio del año 3 por el método prospectivo y el saldo financiero al principio del año 4, tanto por el método retrospectivo como por el método recurrente.

Resolución

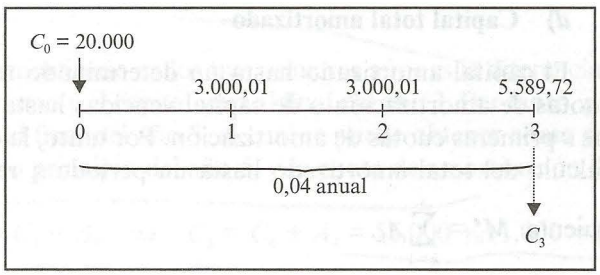
Si utilizamos el método prospectivo para hallar el saldo financiero al principio del año 3 o final del año 2, éste será igual a la suma financiera en 2 de los términos amortizativos pendientes de vencer:



$$C_2 = 5.589,72 \times a_{\overline{3}|0,04} = 15.511,98\ €$$

Si utilizamos el método retrospectivo para hallar el saldo financiero al principio del año 4 o final del año 3, éste será igual al valor en el punto 3 de la cuantía inicial del préstamo (prestación vencida) menos la suma financiera en 3 de los términos amortizativos vencidos (contraprestación vencida).

© Ediciones Pirámide



$$C_3 = 20.000 \times 1{,}04^3 - 3.000{,}01 \times s_{\overline{2}|0{,}04} \times 1{,}04 - 5.589{,}72 = 10.542{,}74\ €$$

Asimismo, el saldo financiero al final del año 3 también lo podemos hallar por el método recurrente a partir del saldo en 2:

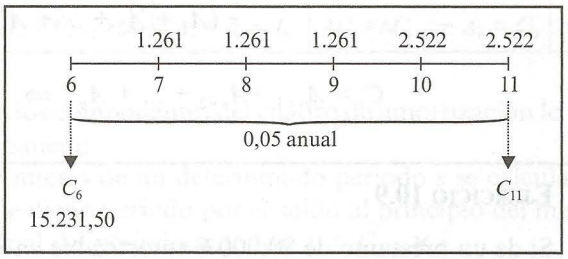
$$C_3 = 15.511{,}98 \times 1{,}04 - 5.589{,}72 = 10.542{,}74\ €$$

EJERCICIO 10.8

El capital vivo de un determinado préstamo al principio del año 7 asciende a 15.231,50 €. Si el tipo de interés es del 5% anual, la cuantía del término amortizativo correspondiente a los años 7, 8 y 9 es 1.261 €, y en los dos años siguientes el importe del término amortizativo es el doble, ¿a cuánto ascenderá la deuda pendiente al principio del año 12?

Resolución

La deuda pendiente al principio del año 12 es el capital vivo al final del año 11, C_{11}, el cual lo podemos calcular como el valor financiero en 11 del saldo en 6 minorado por la suma financiera en 11 de los términos amortizativos que vencen desde el principio del año 7 hasta el final del año 11.



$$C_{11} = 15.231{,}50 \times 1{,}05^5 - 1.261 \times s_{\overline{5}|0{,}05} \times 1{,}05^2 - 2.522 \times s_{\overline{2}|0{,}05} = 9.886{,}81\ €$$

© Ediciones Pirámide

d) Capital total amortizado

El capital amortizado hasta un determinado momento s es la suma de las cuotas de amortización o de capital vencidas hasta dicho momento, es decir, de las s primeras cuotas de amortización. Por tanto, la expresión matemática para el cálculo del total amortizado hasta un período s, representado por M_s^e, es la siguiente: $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h$.

Además, si expresamos las cuotas de amortización como diferencia del capital vivo al principio y al final de cada período, tenemos la siguiente expresión:

$$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = A_1 + A_2 + ... + A_s = (C_0 - C_1) + (C_1 - C_2) + ... + (C_{s-1} - C_s)$$

$$M_s^e = C_0 - C_s$$

De acuerdo con la expresión anterior, el total amortizado hasta un determinado período s se puede obtener como diferencia entre el principal del préstamo C_0 y la deuda pendiente al final de dicho período C_s.

Por otra parte, para que la operación quede cancelada, el total amortizado hasta el final de la operación debe ser igual a la cuantía inicial del préstamo: $M_n^e = \sum_{h=1}^{n} A_h = C_0$. O, lo que es equivalente, la cuantía del préstamo es la suma aritmética de todas las cuotas de amortización.

Asimismo, el capital pendiente de amortizar o saldo también lo podemos calcular como diferencia entre el capital objeto del préstamo y el capital amortizado hasta ese momento, y por tanto como suma aritmética de las cuotas de amortización pendientes de vencimiento:

$$C_s = C_0 - M_s^e = \sum_{h=1}^{n} A_h - \sum_{h=1}^{s} A_h = (A_1 + A_2 + ... + A_s + A_{s+1} + A_{s+2} + ... + A_n) - (A_1 + A_2 + ... + A_s)$$

$$C_s = A_{s+1} + A_{s+2} + ... + A_n \Rightarrow C_s = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}$$

EJERCICIO 10.9

Si de un préstamo de 80.000 € amortizable en 9 años, se sabe que al principio del quinto año el capital vivo es de 55.000 €, y que en el cuarto y quinto año se amortizan, respectivamente, 11.000 y 12.000 € de capital, calcular el capital amortizado en los tres primeros años y el capital vivo al principio del sexto año.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El capital amortizado en los tres primeros años es la diferencia entre la cuantía inicial del préstamo y el capital vivo al final del año 3. Por tanto, primero hallamos el capital vivo al final del año 3, el cual se puede obtener como suma del saldo al final del año 4 o principio del año 5, y la cuota de amortización de dicho año:

$$C_4 = C_3 - A_4 \Rightarrow C_3 = C_4 + A_4 = 55.000 + 11.000 = 66.000$$

El total amortizado en los tres primeros años será: $M_3^e = C_0 - C_3 = 80.000 - 66.000 = 14.000$ €.

El capital vivo al principio del sexto año es la deuda pendiente de amortizar al final del quinto año, el cual lo podemos calcular como diferencia entre el saldo al final del año 4 o principio del año 5 y la cuota de amortización del año 5: $C_5 = C_4 - A_5 = 55.000 - 12.000 = 43.000$ €.

10.4. CUADRO DE AMORTIZACIÓN

En el cuadro de amortización se registra período a período la evolución de la operación de préstamo, reflejándose los valores que toman cada una de las magnitudes de la operación (términos amortizativos, tipos de interés, cuotas de capital o de amortización, cuotas de interés, total amortizado y saldo o capital vivo).

Período	Tipo de interés	Término amortizativo ($a_s = I_s + A_s$)	Cuota de interés ($I_s = C_{s-1} \times i_s$)	Cuota de amortización ($A_s = a_s - I_s$)	Total amortizado ($M_s^e = M_{s-1}^e - A_s$)	Saldo o capital vivo ($C_s = C_{s-1} + A_s$)
0	—	—	—	—	—	C_0
1	i_1	a_1	$I_1 = C_0 \times i_1$	$A_1 = a_1 - I_1$	$M_1^e = A_1$	$C_1 = C_0 - A_1$
2	i_2	a_2	$I_2 = C_1 \times i_2$	$A_2 = a_2 - I_2$	$M_2^e = M_1^e + A_2$	$C_2 = C_1 - A_2$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	i_n	a_n	$I_n = C_{n-1} \times i_n$	$A_n = a_n - I_n$	$M_n^e = M_{n-1}^e + A_n = C_0$	$C_n = C_{n-1} - A_n = 0$

Cada uno de los componentes del cuadro de amortización lo podemos obtener de la siguiente manera:

La cuota de interés de un determinado período s se calcula multiplicando el tipo de interés de dicho período por el saldo al principio del mismo, o sea, por el capital vivo al final del período anterior: $I_s = C_{s-1} \times i_s$.

Si se conoce la cuantía del término amortizativo de un determinado período s, la cuota de amortización del mismo se determina como la diferencia entre dicho término amortizativo y la cuota de interés de dicho período: $A_s = a_s - I_s$.

© Ediciones Pirámide

Si se conoce la cuota de amortización correspondiente a un período s, la cuantía del correspondiente término amortizativo se puede obtener como la suma de la cuota de interés y de la cuota de amortización de dicho período: $a_s = I_s + A_s$.

El total amortizado hasta el período s se obtiene al sumar las cuotas de amortización vencidas, o sumando al total amortizado hasta el período anterior la cuota de amortización del período s: $M_s^e = M_{s-1}^e + A_s$.

El saldo o capital vivo al final de un determinado período s se calcula restando al saldo del período anterior la cuota de amortización del período s: $C_s = C_{s-1} - A_s$.

EJERCICIO 10.10

Confeccionar el cuadro de amortización correspondiente a un préstamo de 15.000 € amortizable en 4 años, del que se sabe que los términos amortizativos de los dos primeros años son de 3.000 € y que el del tercer año es de 3.800 €. El tipo de interés anual del préstamo es el 3% en el primer año y el 4% en los restantes.

Resolución

Aplicando las ecuaciones anteriormente indicadas obtenemos el valor de cada uno de los componentes del cuadro de amortización. Así, para el primer año y segundo año tenemos:

Año 1	Año 2
$I_1 = C_0 \times i_1 = 15.000 \times 0{,}03 = 450$	$I_2 = C_1 \times i_2 = 12.450 \times 0{,}04 = 498$
$A_1 = a_1 - I_1 = 3.000 - 450 = 2.550$	$A_2 = a_2 - I_2 = 3.000 - 498 = 2.502$
$M_1^e = A_1 = 2.550$	$M_2^e = M_1^e + A_2 = 2.550 + 2.502 = 5.052$
$C_1 = C_0 - A_1 = 15.000 - 2.550 = 12.450$	$C_2 = C_1 - A_2 = 12.450 - 2.502 = 9.948$

El cuadro de amortización completo de esta operación de préstamo es el siguiente:

Año	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	15.000
1	0,03	3.000	450	2.550	2.550	12.450
2	0,04	3.000	498	2.502	5.052	9.948
3	0,04	3.800	397,92	3.402,08	8.454,08	6.545,92
4	0,04	6.807,76	261,84	6.545,92	15.000	0,00

Para el último año hemos calculado el término amortizativo como suma de la cuota de interés y la cuota de amortización de dicho año, siendo esta última igual al capital pendiente de amortizar al principio del año 4:

© Ediciones Pirámide

$$a_4 = I_4 + A_4 = 261{,}84 + 6.545{,}92 = 6.807{,}76\ €$$

Otra forma de calcular el término amortizativo del último año es a través de la ecuación de equivalencia financiera. Si ésta la planteamos al final de la operación, tenemos:

$$15.000 \times 1{,}03 \times 1{,}04^3 = 3.000 \times s_{\overline{2}|0{,}04} \times 1{,}04^2 + 3.800 \times 1{,}04 + a_4 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_4 = 6.807{,}76\ €$$

10.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si un préstamo de 6.000 € se amortiza a los dos años de su concesión a través de un solo pago de 8.000 €, calcular el tipo de interés anual al que se pactó el préstamo.

Resolución

El capital que el prestatario entrega al cabo de dos años es equivalente a la cuantía inicial del préstamo. Si se valora la operación en capitalización compuesta, el tipo de interés anual fijado es: $8.000 = 6.000(1 + i)^2 \Rightarrow i = 15{,}47\%$.

2. Si el último término amortizativo anual de un préstamo es igual a 15.000 € y el tipo de interés pactado es el 4% anual, ¿a cuánto asciende el capital pendiente de amortizar al principio del último año?

Resolución

Sabemos que el último término amortizativo verifica: $a_n = C_{n-1} \times i + A_n$, siendo $A_n = C_{n-1}$, por tanto $a_n = C_{n-1} \times i + C_{n-1} \Rightarrow C_{n-1} = \dfrac{15.000}{1{,}04} = 14.423{,}08$ €. También podemos determinar dicho saldo a través del método prospectivo: $C_{n-1} = a_n (1 + i)^{-1}$.

3. Si en un préstamo pactado al 4% anual, de 10 años de duración, se sabe que el capital amortizado en los nueve primeros años es de 12.500 € y que el último año el prestatario abona 50 € en concepto de intereses, hallar el importe del préstamo.

Resolución

Se verifica: $C_0 = M_{10}^e = M_9^e + A_{10} = 12.500 + A_{10}$. Además, el capital amortizado el último año (año 10) es el capital vivo al final del año 9: $A_{10} = C_9$, el cual se

© Ediciones Pirámide

puede deducir de la cuota de interés del último año: $I_{10} = 50 = C_9 \times 0{,}04 \Rightarrow C_9 =$ $= 1.250$. Por tanto, la cuantía del préstamo es: $C_0 = 12.500 + 1.250 = 13.750$ €.

4. Confeccionar el cuadro de amortización de un préstamo de 12.000 € amortizable en 3 años al 5% anual, siendo la cuantía de los términos amortizativos la siguiente: 5.000 € para el año 1, 6.000 € para el año 2 y 2.079 € para el año3.

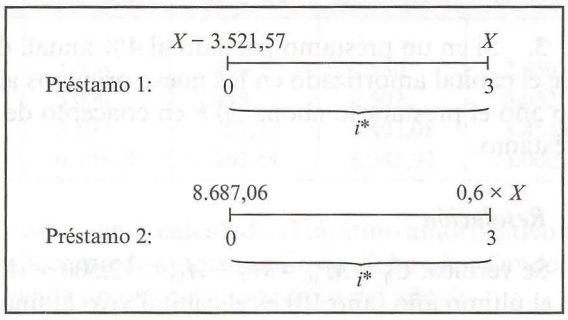
Resolución

Año	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	12.000
1	0,05	5.000	600	4.400	4.400	7.600
2	0,05	6.000	380	5.620	10.020	1.980
3	0,05	2.079	99	1.980	12.000	0

5. A una persona se le concede un préstamo de cuantía nominal X, con pago de intereses anticipados y duración 3 años. El préstamo se amortiza a través de reembolso único y el importe total de los intereses anticipados asciende a 3.521,57 €. Hallar el importe nominal X del préstamo y el tipo de interés anticipado, si se sabe que en otra operación de préstamo cuyo nominal es el 60% del importe de la anterior, de 3 años de duración, pactada al mismo tipo de interés prepagable, el importe neto que recibe el prestatario es 8.687,06 €.

Resolución

Al tratarse de préstamos con pago anticipado de intereses y amortizable a través de un solo pago, al principio de la operación el prestatario debe abonar todos los intereses de la misma, percibiendo, por tanto, el nominal del préstamo disminuido en la cuantía de los intereses:



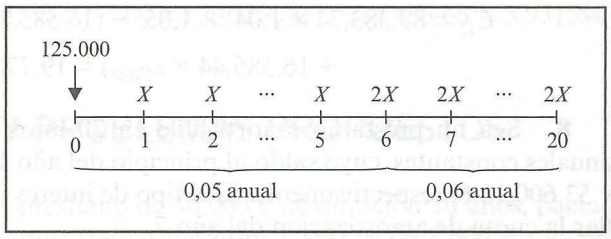
© Ediciones Pirámide

El importe de los intereses prepagables se puede poner en función del nominal del préstamo. Así, en el préstamo 1 tenemos: $3.521,57 = X[1 - (1 - i^*)^3]$. También podemos expresar la cuantía neta que percibe el prestatario en función del nominal. De esta forma en el préstamo 2 tenemos: $8.687,06 = 0,6 \times X(1 - i^*)^3$. Por tanto, se llega a un sistema de dos ecuaciones con dos incógnitas del que obtenemos que $X = 18.000$ € e $i^* = 6,99998\%$ anual.

6. Sea un préstamo de 125.000 € a amortizar en 20 años, mediante términos amortizativos anuales de cuantía X para los cinco primeros años y de importe $2X$ para los restantes, a un tipo de interés igual del 5% anual para los seis primeros años y del 6% anual para los restantes. Calcular la cuota de interés del año 6 y la cuota de amortización del año 13.

Resolución

Primero hallamos el importe de los términos amortizativos a través de la ecuación de equivalencia financiera en el origen:



$$125.000 = X \times a_{\overline{5}|0,05} + 2X \times \ddot{a}_{\overline{20-5}|0,06} \times 1,05^{-6} \Rightarrow X = 6.347,10 \text{ €}$$

Para hallar la cuota de interés del año 6, $I_6 = C_5 \times 0,05$, necesitamos calcular el capital vivo al final del año 5. Si hallamos C_5 por el método retrospectivo: $C_5 = 125.000 \times 1,05^5 - 6.347,10 \times s_{\overline{5}|0,05} = 124.463,46$. Por tanto, se tiene: $I_6 = 124.463,46 \times 0,05 = 6.223,17$ €.

La cuota de amortización del año 13 la podemos obtener como diferencia entre el término amortizativo y la cuota de interés correspondientes al año 13: $A_{13} = 2X - I_{13}$, y para calcular la cuota de interés necesitamos conocer el saldo al final del período anterior: $I_{13} = C_{12} \times 0,06$. A su vez, C_{12} se puede hallar, por ejemplo, a través del método prospectivo: $C_{12} = 2 \times 6.347,10 \times a_{\overline{20-12}|0,06} = 78.828,36$. Por tanto, la cuota de amortización del año 13 es $A_{13} = 2 \times 6.347,10 - 78.828,36 \times \times 0,06 = 7.964,50$ €.

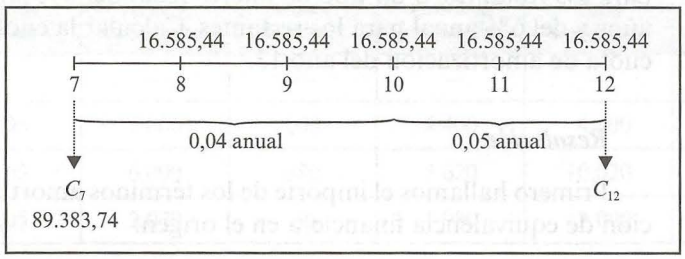
7. El capital vivo de un determinado préstamo al principio del año 8 asciende a 89.383,74 €. Si el tipo de interés es el 4% anual para los diez primeros años

© Ediciones Pirámide

del préstamo y el 5% anual para los restantes, y se sabe que los términos amortizativos anuales son de cuantía constante e igual a 16.585,44 €, hallar el importe de la deuda pendiente al principio del año 13.

Resolución

La deuda pendiente al principio del año 13 es el saldo al final del año 12, C_{12}, el cual lo podemos hallar a través del método recurrente, considerando el capital vivo al principio del año 8 y los términos amortizativos que vencen entre los años 8 y 12.

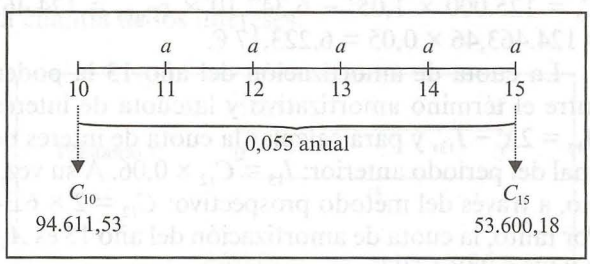


$$C_{12} = 89.383{,}74 \times 1{,}04^3 \times 1{,}05^2 - (16.585{,}44 \times s_{\overline{3}|0{,}04} \times 1{,}05^2 + \\ + 16.585{,}44 \times s_{\overline{2}|0{,}05}) = 19.770{,}36\ €$$

8. Sea un préstamo amortizable en 20 años con términos amortizativos anuales constantes, cuyo saldo al principio del año 11 y del año 16 es 94.611,53 € y 53.600,18 €, respectivamente. Si el tipo de interés pactado es el 5,5% anual, hallar la cuota de amortización del año 7.

Resolución

Primero hemos de calcular el importe constante de los términos amortizativos a través del método recurrente, expresando el saldo en 15 en función del saldo en 10:

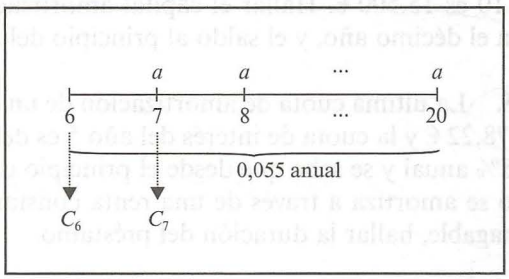


$$C_{15} = C_{10}(1 + i)^5 - a \times s_{\overline{15-10}|i}$$

$$53.600{,}18 = 94.611{,}53 \times 1{,}055^5 - a \times s_{\overline{5}|0{,}055} \Rightarrow a = 12.551{,}90$$

© Ediciones Pirámide

La cuota de amortización del año 7 se puede deducir de diversas formas. Una de ellas es hallando la diferencia entre el capital vivo al final del año 6 y el saldo en 7, para lo cual previamente hemos de obtener tales saldos.



$$C_6 = 12.551{,}90 \times a_{\overline{20-6}|0{,}055} = 120.368{,}30$$

$$C_7 = 12.551{,}90 \times a_{\overline{20-7}|0{,}055} = 114.436{,}66$$

$$A_7 = C_6 - C_7 = 120.368{,}30 - 114.436{,}66 = 5.931{,}64\ €.$$

10.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea un préstamo de 80.000 € de duración 10 años, pactado al 6% anual. Si el término amortizativo del primer año es de 8.000 €, ¿a cuánto asciende la cuota de interés del segundo año?

2. Calcular X y completar el siguiente cuadro de amortización:

Año	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	
1	0,05	8.000	3.500			
2	0,06	X				
3	0,065	X				
4	0,07	14.000				
5	0,07	14.000				

3. Si un préstamo simple de 10.000 € y duración 4 años se pacta al 5% de interés anual anticipado, calcular la cuantía neta que percibirá el prestatario.

© Ediciones Pirámide

4. Sea un préstamo de 200.000 € amortizable anualmente, del que se conocen los siguientes datos: el tipo de interés es el 5% anual, el total amortizado en los nueve primeros años es de 95.000 €, el importe de cada uno de los cuatro primeros términos amortizativos es de 16.000 € y la cuantía del término amortizativo del año 10 es 15.500 €. Hallar el capital amortizado desde el quinto año (incluido) hasta el décimo año, y el saldo al principio del año 11.

5. La última cuota de amortización de un determinado préstamo asciende a 15.478,22 € y la cuota de interés del año 5 es de 9.560,88 €. Si el tipo de interés es del 6% anual y se sabe que desde el principio del quinto año en adelante el préstamo se amortiza a través de una renta constante, anual, temporal, inmediata y pospagable, hallar la duración del préstamo.

6. A una persona se le concede un préstamo de 90.000 € a amortizar en 8 años, mediante términos amortizativos anuales de cuantía X para los dos primeros años y para los últimos tres años, y $0{,}5X$ para el tercer, cuarto y quinto año. Si el tipo de interés es del 3% anual para los tres primeros años y del 4,5% anual para los restantes, calcular el capital amortizado en los primeros cuatro años.

7. En un determinado préstamo amortizable al 5,8% anual en 10 años, a través de una renta constante anual, temporal, inmediata y pospagable, se sabe que el importe total amortizado en los dos primeros años es 17.336,98 €. Hallar la cuota de amortización del primer año.

© Ediciones Pirámide

11 Métodos clásicos de amortización de préstamos

OBJETIVOS

- Analizar las características básicas y las relaciones específicas en los métodos clásicos de amortización de préstamos: préstamo francés, préstamo americano en sus dos modalidades (simple y con fondo) y préstamo con cuota de amortización constante.

SUMARIO

11.1. Introducción.
11.2. Método francés.
11.3. Método americano.
11.4. Método de cuota de amortización constante.
11.5. Ejercicios y problemas resueltos.
11.6. Ejercicios y problemas propuestos.

11.1. INTRODUCCIÓN

En la lección anterior, al analizar las operaciones financieras de amortización de préstamos con contraprestación múltiple hemos señalado que una de las principales problemáticas en este tipo de operaciones es la determinación de la cuantía de los términos amortizativos. Pues bien, en tales operaciones los términos amortizativos constituyen una renta y, por tanto, se puede aplicar todo lo recogido en las lecciones dedicadas a la valoración de rentas. Además, cualquier sistema o método de amortización de préstamos con contraprestación múltiple se caracteriza por el conjunto de hipótesis que se establecen en cuanto a los tipos de interés, a los términos amortizativos o a cualquiera de sus componentes.

Por consiguiente, la amortización de un préstamo con contraprestación múltiple se puede plantear con cualquier modalidad de renta, y su estudio en términos generales atiende a lo señalado en la lección anterior. No obstante, existen unos métodos clásicos de amortización, los más utilizados en la práctica, que son los que analizaremos en esta lección: método francés, método americano y método de cuota de amortización constante o método italiano.

11.2. MÉTODO FRANCÉS

Este método de amortización de préstamos parte de la **hipótesis básica** de que **tanto los términos amortizativos como el tipo de interés son de cuantía constante:** $a_s = a$; $i_s = i$, $\forall\ s|s = 1,2, ..., n$. Por tanto, el préstamo se amortiza mediante una renta constante, temporal, inmediata y pospagable, y aplicando un mismo tipo de interés en toda la operación. La operación de préstamo queda definida por el siguiente gráfico:

© Ediciones Pirámide

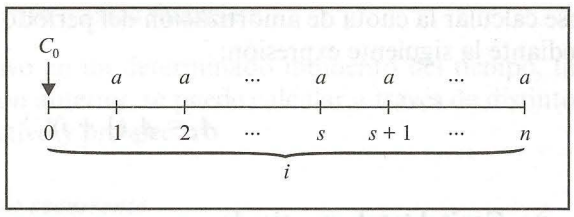


Figura 11.1.

A continuación vamos a plantear la ecuación de equivalencia financiera, la ley de variación de las cuotas de amortización, el capital total amortizado y diversas formas de calcular el saldo financiero o capital vivo en un préstamo amortizable por este método.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

En toda operación financiera se ha de verificar la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación en un mismo momento del tiempo. Así, si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación, tenemos:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i}$$

Siendo C_0 el principal o cuantía del préstamo, n el número de términos que ha de abonarse e i el tipo de interés unitario expresado en la misma unidad de tiempo que n, es decir, en la periodicidad de los términos amortizativos.

b) Ley de variación de las cuotas de amortización

Para obtener la ley de variación de las cuotas de amortización hemos de aplicar la ecuación dinámica de amortización en dos períodos consecutivos y obtener la diferencia de ambas expresiones:

$$\begin{aligned} C_s &= C_{s-1}(1+i) - a \\ C_{s+1} &= C_s(1+i) - a \end{aligned}$$

$$\underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}(1+i) \Rightarrow A_{s+1} = A_s(1+i)$$

De la expresión anterior se deduce que las cuotas de amortización en el método francés varían en progresión geométrica de razón $q = 1 + i$. Por tanto, en este tipo de préstamos, una vez conocidos el importe de una cuota de amortización y el tipo de interés, es posible hallar cualquier otra cuota de amortización, pudién-

© Ediciones Pirámide

dose calcular la cuota de amortización del período s a través de la primera cuota, mediante la siguiente expresión:

$$A_s = A_1(1 + i)^{s-1}$$

c) Capital total amortizado

Teniendo en cuenta que el **capital amortizado hasta un determinado momento** s, M_s^e, es la suma aritmética de las cuotas de amortización o de capital vencidas hasta dicho momento y que las cuotas de amortización en el préstamo francés varían en progresión geométrica, el capital amortizado lo podemos hallar a través de la siguiente expresión:

$$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = A_1 + A_1(1 + i) + A_1(1 + i)^2 + \ldots + A_1(1 + i)^{s-1} =$$

$$= A_1\left[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{s-1}\right]$$

Sabiendo que $\left[1 + (1 + i) + (1 + i)^2 + \ldots + (1 + i)^{s-1}\right]$ es la suma aritmética de una sucesión de s términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1 + i$, podemos sustituir dicha expresión por el resultado de su suma, el cual se puede hallar a través de la fórmula siguiente: $S = \dfrac{z_n \times q - z_1}{q - 1}$, siendo q la razón y z_1 y z_n el primer y último término de la sucesión, respectivamente. Por tanto, tenemos:

$$M_s^e = A_1 \frac{(1 + i)^{s-1}(1 + i) - 1}{(1 + i) - 1} = A_1 \frac{(1 + i)^s - 1}{i} \Rightarrow M_s^e = A_1 \times s_{\overline{s}|i}$$

Generalizando para el período n: $M_n^e = A_1 \times s_{\overline{n}|i}$, y teniendo en cuenta que al final de la operación de préstamo el capital debe estar totalmente amortizado, se tiene: $M_n^e = C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i}$. Por tanto, si despejamos de la expresión anterior A_1, obtenemos que en el préstamo francés la primera cuota de amortización la podemos hallar, en función de la cuantía del préstamo, a través de la siguiente expresión: $A_1 = \dfrac{C_0}{s_{\overline{n}|i}}$.

Además, si en la expresión $M_s^e = A_1 \times s_{\overline{s}|i}$ sustituimos la primera cuota de amortización por $\dfrac{C_0}{s_{\overline{n}|i}}$, tenemos: $M_s^e = C_0 \dfrac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}$.

© Ediciones Pirámide

d) Capital vivo o saldo financiero

El capital vivo en un determinado momento del tiempo, tal y como hemos visto en la lección anterior, se puede calcular a través de distintos métodos: recurrente, retrospectivo y prospectivo.

*d.*1) *Método recurrente*

Si utilizamos el método recurrente, podemos calcular el capital vivo al final del período s a partir de otro capital vivo previamente hallado. En función del correspondiente al período anterior, se verifica: $C_s = C_{s-1}(1 + i) - a$.

*d.*2) *Método retrospectivo*

Si consideramos la parte de la operación vencida, aplicamos el método retrospectivo y, por tanto, el capital vivo se calcula como la diferencia entre el valor en el punto s de la prestación vencida y el valor en dicho punto de la contraprestación vencida: $C_s = C_0(1 + i)^s - a \times s_{\overline{s}|i}$. Gráficamente:

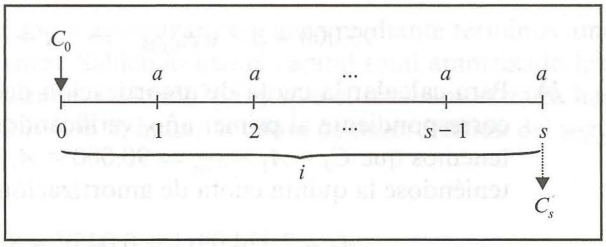


Figura 11.2.

*d.*3) *Método prospectivo*

Si atendemos a la parte de la operación pendiente de vencer, aplicamos el **método prospectivo** y, en este caso, el capital vivo coincide con el valor en el punto s de la contraprestación futura: $C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$. Gráficamente:

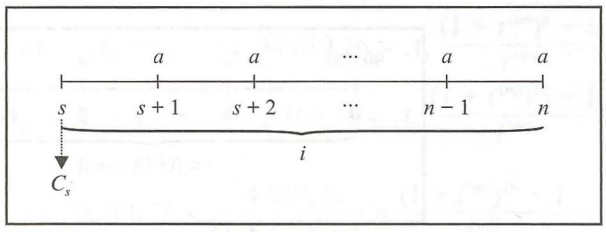


Figura 11.3.

© Ediciones Pirámide

También podemos calcular el capital vivo al final del período s a través del total amortizado hasta dicho período:

$$M_s^e = C_0 - C_s \Rightarrow C_s = C_0 - M_s^e = C_0 - C_0 \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}} \Rightarrow C_s = C_0\left(1 - \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}\right)$$

EJERCICIO 11.1

Sea un préstamo de 90.000 € a amortizar en 10 años mediante términos amortizativos anuales constantes, a un tipo de interés del 4,5% anual. Calcular: *a*) la cuantía del término amortizativo; *b*) la cuota de amortización del año 5; *c*) el capital amortizado hasta el final del año 8; *d*) el capital pendiente de amortizar al final del año 3 a través del método retrospectivo, y *e*) el saldo al final del año 4 a través del método prospectivo.

Resolución

a) Para calcular el término amortizativo planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$90.000 = a \times a_{\overline{10}|0,045} \Rightarrow a = 11.374,09 \text{ €}$$

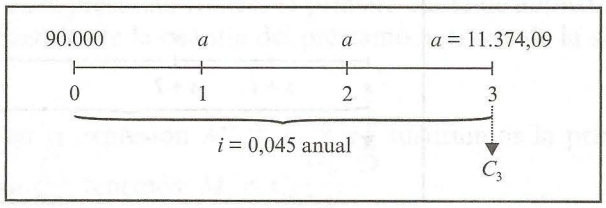
b) Para calcular la cuota de amortización del año 5, necesitamos hallar la correspondiente al primer año, verificándose: $A_5 = A_1(1 + i)^4$. Por tanto, tenemos que $C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i} \Rightarrow 90.000 = A_1 \times s_{\overline{10}|0,045} \Rightarrow A_1 = 7.324,09$, obteniéndose la quinta cuota de amortización:

$$A_5 = 7.324,09(1 + 0,045)^4 = 8.734,11 \text{ €}.$$

c) El capital amortizado hasta el año 8 lo podemos obtener a través de la siguiente expresión:

$$M_8^e = A_1 \times s_{\overline{8}|i} = 7.324,09 \times s_{\overline{8}|0,045} = 68.700,06 \text{ €}$$

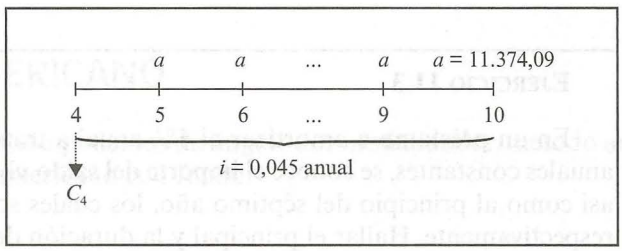
d) Para calcular el capital vivo al final del año 3 a través del método retrospectivo hemos de plantear la diferencia financiera entre la prestación vencida y la contraprestación pasada:



$$C_3 = 90.000(1 + 0,045)^3 - 11.374,09 \times s_{\overline{3}|0,045} = 67.024,15 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

e) Para calcular el capital pendiente de amortizar al final del año 4 a través del método prospectivo, tenemos que calcular en dicho punto la suma financiera de los términos amortizativos pendientes de vencimiento:



$$C_4 = 11.374{,}09 \times a_{\overline{6}|0{,}045} = 58.666{,}11\ €$$

EJERCICIO 11.2

Sea un préstamo a amortizar en n años mediante términos amortizativos trimestrales constantes. Sabiendo que el capital total amortizado hasta el final del segundo año asciende a 34.619,26 € y que el total amortizado hasta el final del cuarto año es 72.106,96 €, hallar la cuota de amortización del segundo trimestre del quinto año.

Resolución

Se trata de un préstamo francés amortizable trimestralmente, por lo que las cuotas de amortización varían en progresión geométrica de razón $1 + i^{(m)}$. Por tanto, la decimoctava cuota de amortización verifica: $A_{18} = A_1(1 + i^{(m)})^{17}$. Para calcular A_{18} necesitamos hallar previamente tanto la primera cuota de amortización como el tipo de interés trimestral pactado.

Teniendo en cuenta que se conocen $M^e_{2\times 4} = M^e_8$ y $M^e_{4\times 4} = M^e_{16}$, tenemos:

$$\left.\begin{aligned} M^e_8 = A_1 \times s_{\overline{8}|i^{(m)}} \Rightarrow 34.619{,}26 = A_1 \frac{(1+i^{(m)})^8 - 1}{i^{(m)}} \\ M^e_{16} = A_1 \times s_{\overline{16}|i^{(m)}} \Rightarrow 72.106{,}26 = A_1 \frac{(1+i^{(m)})^{16} - 1}{i^{(m)}} \end{aligned}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 72.106{,}26 = \frac{34.619{,}26}{\dfrac{(1+i^{(m)})^8 - 1}{i^{(m)}}} \times \frac{(1+i^{(m)})^{16} - 1}{i^{(m)}}$$

© Ediciones Pirámide

Haciendo $(1 + i^{(m)})^8 = z$ llegamos a: $\frac{72.106,96}{34.619,26} = \frac{z^2 - 1}{z - 1} = \frac{(z + 1)(z - 1)}{z - 1} =$
$= z + 1$, de donde obtenemos $z = 1{,}082856768 \Rightarrow i^{(m)} = 1\%$ trimestral, por lo que $A_1 = 4.178{,}21$, y $A_{18} = A_1(1 + i^{(m)})^{17} = 4.948{,}27$ €.

EJERCICIO 11.3

En un préstamo a amortizar al 4% anual a través de términos amortizativos anuales constantes, se conoce el importe del saldo vivo al principio del cuarto año, así como al principio del séptimo año, los cuales son 59.199,95 € y 35.802,67 €, respectivamente. Hallar el principal y la duración del préstamo.

Resolución

Se trata de un préstamo francés, pudiéndose calcular la cuantía del préstamo como $C_0 = a \times a_{\overline{n}|i}$, para lo cual necesitamos conocer tanto la cuantía del término amortizativo como la duración de la operación. Tales datos los podemos hallar a través de la expresión de cálculo de los saldos vivos por el método prospectivo, verificándose:

$$\left.\begin{aligned} C_3 = a \times a_{\overline{n-3}|i} &\Rightarrow 59.199{,}95 = a\,\frac{1 - (1 + 0{,}04)^{-(n-3)}}{0{,}04} \\ C_6 = a \times a_{\overline{n-6}|i} &\Rightarrow 35.802{,}67 = a\,\frac{1 - (1 + 0{,}04)^{-(n-6)}}{0{,}04} \end{aligned}\right\} 35.802{,}67 =$$

$$= \frac{59.199{,}95}{\dfrac{1 - 1{,}04^{-(n-3)}}{0{,}04}} \times \frac{1 - 1{,}04^{-n+6}}{0{,}04}$$

Obteniendo que $n = 10$ años y $a = 9.863{,}28$. Por tanto, la cuantía del préstamo es: $C_0 = 9.863{,}28 \times a_{\overline{10}|0{,}04} = 80.000{,}04$ €.

Otro procedimiento es utilizando el método recurrente para relacionar el saldo en 3 y en 6. Así, tenemos:

$$C_6 = C_3(1 + i)^3 - a \times s_{\overline{3}|i} \Rightarrow 35.802{,}67 = 59.199{,}95 \times 1{,}04^3 - a \times s_{\overline{3}|0{,}04} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a = 9.863{,}28$$

Utilizando de nuevo el mismo método, se verifica:

$$59.199{,}95 = C_0 \times 1{,}04^3 - 9.863{,}28 \times s_{\overline{3}|0{,}04} \Rightarrow C_0 = 80.000{,}04\ €$$

© Ediciones Pirámide

Y finalmente, sustituyendo en $C_0 = a \times a_{\overline{10}|0,04}$, tenemos:

$$80.000,04 = 9.863,28 \times a_{\overline{n}|0,04} \Rightarrow n = 10 \text{ años}$$

11.3. MÉTODO AMERICANO

En este método podemos distinguir dos modalidades: método americano simple y método americano con fondo.

11.3.1. Método americano simple

Esta modalidad de amortización de préstamos se caracteriza por el hecho de que a lo largo de los ***n* − 1 períodos iniciales, el prestatario o deudor abona únicamente los intereses correspondientes.** Al final del último período, el prestatario, además de abonar los intereses correspondientes, devuelve íntegramente el principal del préstamo C_0. El gráfico de la operación de préstamo descrita es el siguiente:

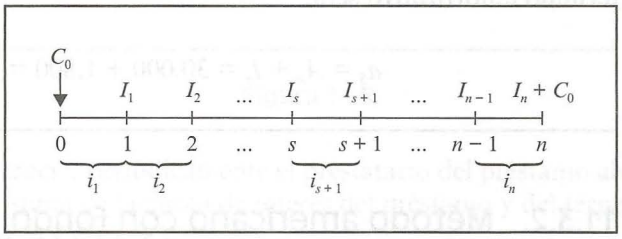


Figura 11.4.

En este tipo de operaciones, las $n - 1$ primeras cuotas de amortización son nulas, es decir: $A_1 = A_2 = ... = A_{n-1} = 0$, coincidiendo la última con el capital prestado: $A_n = C_0$. Además, como el prestatario abona periódicamente los intereses, el capital vivo al final de cada uno de los $n - 1$ primeros períodos siempre es el mismo e igual al principal: $C_1 = C_2 = ... = C_{n-1} = C_0$. En consecuencia, el total amortizado en los $n - 1$ primeros períodos es nulo: $M^e_{n-1} = \sum_{s=1}^{n-1} A_s = 0$, verificándose en el último período $M^e_n = C_0$.

En consecuencia, los términos amortizativos verifican:

$$a_s = A_s + I_s = 0 + I_s = C_0 \times i_s; \mid s = 1, 2, ..., n - 1$$

$$a_n = A_n + I_n = C_0 + C_0 \times i_n$$

© Ediciones Pirámide

Si el tipo de interés i es constante, las cuotas de interés también lo serán:

$$I_1 = I_2 = ... = I_n = C_0 \times i$$

EJERCICIO 11.4

Sea un préstamo de 30.000 € a amortizar por el sistema americano en 5 años y al 6% anual. Calcular la cuantía de los términos amortizativos del préstamo.

Resolución

Como el tipo de interés es constante y las cuotas de amortización son nulas en los cuatro primeros años, el término amortizativo anual será:

$$a_s = A_s + I_s = 0 + I_s = 30.000 \times 0{,}06 = 1.800\ €, \mid s = 1, 2, 3, 4$$

En el último período, año 5, además de pagar la cuota de interés correspondiente, el prestatario debe devolver la cuantía total del préstamo, por lo que el término amortizativo será:

$$a_5 = A_n + I_n = 30.000 + 1.800 = 31.800\ €$$

11.3.2. Método americano con fondo

Esta modalidad, también denominada *sinking-fund,* se caracteriza por la **combinación de dos operaciones: una operación de amortización por el método americano simple y una operación de constitución** para formar el capital objeto del préstamo.

En la segunda operación, el deudor de la operación de préstamo entrega periódicamente una determinada cuantía, f_s, a fin de formar o constituir el capital objeto del préstamo C_s. Además, la operación de constitución es independiente de la operación de amortización y, por tanto, puede llevarse a cabo con el sujeto prestamista de la operación de préstamo o con otro sujeto, además de pactarse a un tipo de interés i'_s que no tiene que coincidir con el tipo de interés del préstamo i_s. En el supuesto que tanto el tipo de interés de la operación de constitución como los términos constitutivos sean constantes, se ha de verificar: $f \times s_{\overline{n}|i'} = C_0$. Transcurridos los s primeros períodos el montante constituido es: $F_s = f \times s_{\overline{s}|i'}$.

El diagrama de cada una de estas operaciones es el siguiente.

© Ediciones Pirámide

Operación de amortización:

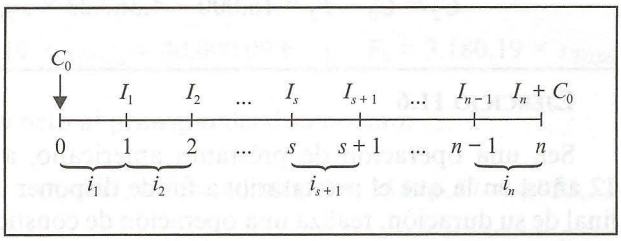


Figura 11.5.

Operación de constitución:

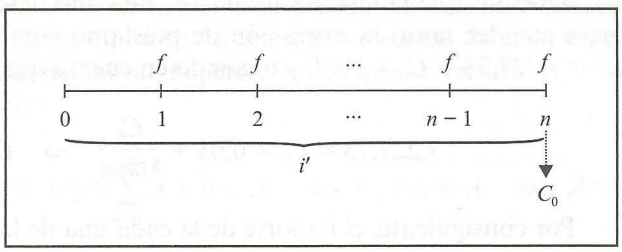


Figura 11.6.

En consecuencia, periódicamente el prestatario del préstamo abona un término a'_s que es la suma de la cuota de interés del préstamo y del término constitutivo del fondo: $a'_s = C_0 \times i_s + f$.

El capital pendiente de formar al final del período s o saldo neto de la operación conjunta es: $C'_s = C_0 - F_s = C_0 - f \times s_{\overline{s}|i'}$.

EJERCICIO 11.5

Sea un préstamo de 18.000 € a amortizar por el método americano en 4 años al 6% anual. Además, se contrata una operación de constitución al 2% anual. Calcular el saldo neto de la operación conjunta al final del segundo año.

Resolución

Para calcular el capital pendiente de constituir es necesario hallar la cuantía que el sujeto aporta periódicamente al fondo:

$$f \times s_{\overline{s}|i'} = C_0 \Rightarrow f \times s_{\overline{4}|0,02} = 18.000 \Rightarrow f = 4.367,23$$

© Ediciones Pirámide

El saldo neto de la operación conjunta al final de segundo año es:

$$C_2' = C_0 - F_2 = 18.000 - 4.367{,}23 \times s_{\overline{2}|0{,}02} = 9.178{,}20\ €$$

Ejercicio 11.6

Sea una operación de préstamo americano, a amortizar al 5% anual en 12 años, en la que el prestatario, a fin de disponer del principal del préstamo al final de su duración, realiza una operación de constitución al 3% anual. Si se sabe que la cuantía anual total que periódicamente el prestatario desembolsa por las dos operaciones es 7.227,73 €, hallar el importe de las cuotas de interés.

Resolución

Sabemos que la cuantía total que cada año desembolsa el sujeto prestatario para atender tanto la operación de préstamo como la de constitución verifica: $a' = 7.227{,}73 = C_0 \times i + f$, y teniendo en cuenta que $C_0 = f \times s_{\overline{n}|i}$, queda:

$$7.227{,}73 = C_0 \times 0{,}05 + \frac{C_0}{s_{\overline{12}|0{,}03}} \Rightarrow C_0 = 60.000{,}04$$

Por consiguiente, el importe de la cada una de las cuotas de interés es:

$$I = 60.000{,}04 \times 0{,}05 = 3.000\ €$$

Ejercicio 11.7

Se sabe que en un préstamo americano con fondo, de 10 años de duración, el saldo neto de la operación conjunta al final del octavo año es 9.632,11 € y que los tipos de interés anuales pactados en el préstamo y en la operación de constitución son el 6% y el 5%, respectivamente. Hallar el capital pendiente de constituir al principio del décimo año.

Resolución

Para hallar el capital pendiente de constituir o saldo neto al principio del décimo año es necesario conocer la cuantía que el sujeto aporta periódicamente al fondo. Para calcular dicha cuantía partimos del saldo neto al principio del noveno año:

$$C_8' = C_0 - F_8 = f \times s_{\overline{10}|0{,}05} - f \times s_{\overline{8}|0{,}05} \Rightarrow 9.632{,}11 = f(s_{\overline{10}|0{,}05} - s_{\overline{8}|0{,}05}) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f = 3.180{,}19$$

© Ediciones Pirámide

Una vez conocido el importe del término constitutivo, hallamos la cuantía del préstamo, así como el importe constituido hasta el final del noveno año:

$$C_0 = 3.180{,}19 \times s_{\overline{10}|0{,}05} = 40.000{,}09\ € \quad \text{y} \quad F_9 = 3.180{,}19 \times s_{\overline{9}|0{,}05} = 35.066{,}57$$

siendo el saldo neto al principio del décimo año:

$$C'_9 = C_0 - F_9 = 40.000{,}09 - 35.066{,}57 = 4.933{,}52\ €$$

11.4. MÉTODO DE CUOTA DE AMORTIZACIÓN CONSTANTE

Este método de amortización de préstamos, también denominado método italiano, tiene como hipótesis básica que las **cuotas de amortización o cuotas de capital son todas del mismo importe,** por lo que se verifica: $A_h = A|h = 1,2, ..., n$. En consecuencia:

$$C_0 = M_n^e = \sum_{h=1}^{n} A = n \times A \quad \Rightarrow \quad C_0 = n \times A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{C_0}{n}$$

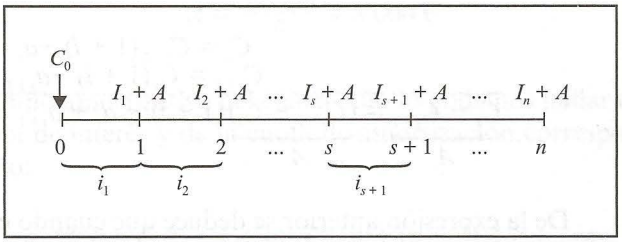


Figura 11.7.

a) Capital total amortizado

Al ser la cuota de amortización constante, el cálculo del capital amortizado hasta un determinado período s verifica:

$$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A = s \times A \quad \Rightarrow \quad M_s^e = s\frac{C_0}{n}$$

© Ediciones Pirámide

b) Capital vivo o saldo financiero

En este método, el cálculo del saldo, además de poder aplicar las fórmulas generales señaladas en la lección anterior, se puede realizar de una forma sencilla, a través del capital total amortizado:

$$C_s = C_0 - M_s^e = C_0 - s \times A = n \times A - s \times A$$

Por tanto, se tiene:

$$C_s = (n - s)\,A = \frac{(n - s)\,C_0}{n}$$

c) Ley de variación de los términos amortizativos cuando el tipo de interés es constante

Al ser constantes las cuotas de amortización, y variables las cuotas de interés, los términos amortizativos son variables. Y para el caso particular en el que los tipos de interés de valoración de la operación de préstamo sean constantes, $i_h = i|h = 1{,}2, \ldots, n$, la ley de variación de los términos amortizativos la podemos obtener calculando la diferencia aritmética entre los saldos correspondientes a dos períodos consecutivos, determinados por la ecuación dinámica de amortización:

$$\begin{array}{c} C_s = C_{s-1}(1 + i) - a_s \\ C_{s+1} = C_s(1 + i) - a_{s+1} \\ \hline \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A}(1 + i) - a_s + a_{s+1} \Rightarrow a_{s+1} = a_s - A \times i \end{array}$$

De la expresión anterior se deduce que cuando el tipo de interés es constante, los términos amortizativos varían en progresión aritmética de razón: $d = -A \times i$. Por tanto, la cuantía de cualquier término, en función del primero, verifica:

$$a_s = a_1 + (s - 1)(-A \times i) = a_1 + (s - 1)\left(-\frac{C_0}{n}\,i\right)$$

Al ser $d < 0$, los términos amortizativos son decrecientes, por lo que hay que analizar si todos son positivos para que la operación de préstamo sea realizable. En este sentido, si se verifica que el último término amortizativo, a_n, es positivo, los demás también lo serán. Por tanto, vamos a comprobar que $a_n > 0$:

$$a_n = A + I_n = A + C_{n-1} \times i = A(1 + i) = \frac{C_0(1 + i)}{n} > 0$$

© Ediciones Pirámide

Por tanto, hemos demostrado que, aun siendo negativa la razón, la operación es posible, dado que todos los términos amortizativos son positivos.

Además, como en este caso los términos amortizativos constituyen una renta de términos variables en progresión aritmética, se verifica la siguiente ecuación de equivalencia financiera:

$$C_0 = A_{(a_1, d=A\times i)\overline{n}|i} = \left(a_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

EJERCICIO 11.8

Sea un préstamo de 40.000 € a amortizar mediante cuotas de capital constantes en 5 años al 7% anual. Calcular: *a*) la cuota de amortización constante, *b*) el término amortizativo del cuarto año y *c*) el capital amortizado hasta el final del año 4.

Resolución

a) Sabiendo que $C_0 = n \times A$, si despejamos obtendremos el importe de la cuota de capital:

$$A = \frac{40.000}{5} = 8.000\ €$$

b) El término amortizativo del cuarto año lo podemos hallar como suma de la cuota de interés y de la cuota de amortización correspondientes a dicho año:

$$a_4 = A + I_4 = A + C_3 \times i = A + (n-3)A \times i \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a_4 = 8.000 + (5-3)8.000 \times 0{,}07 = 9.120\ €$$

c) El capital amortizado hasta el año 4 es:

$$M_4^e = 4 \times A = 4 \times 8.000 = 32.000\ €$$

EJERCICIO 11.9

Sea un préstamo de duración *n* años, amortizable anualmente a través de cuotas de capital constantes y a un tipo de interés anual del 4% para los seis primeros años y del 6% para el resto de los años. Si el importe de la cuota de interés del

© Ediciones Pirámide

segundo año es 2.520 € y la cuantía total que paga el prestatario en el séptimo año es 8.680 €, hallar la cuantía del préstamo y su duración.

Resolución

Al tratarse de un préstamo italiano, se verifica: $C_0 = n \times A$. Sabiendo que $2.520 = I_2 = C_1 \times 0{,}04 = (n-1)A \times 0{,}04$ y que la cuantía que anualmente paga el prestatario es el importe del término amortizativo, siendo para el séptimo año igual a $8.680 = a_7 = I_7 + A = C_6 \times 0{,}06 + A = (n-6)A \times 0{,}06 + A$, por lo que tenemos dos ecuaciones con dos incógnitas. Resolviendo llegamos a que $n =$ 10 años y $A = 7.000$. Por tanto, el principal del préstamo es:

$$C_0 = 10 \times 7.000 = 70.000 \text{ €}$$

EJERCICIO 11.10

Si en un préstamo amortizable anualmente al 5% anual en 9 años, con cuota de amortización constante, el término amortizativo del tercer año es 13.500 €, hallar el saldo al principio del sexto año.

Resolución

El término amortizativo del tercer año verifica:

$$13.500 = 0{,}05 \times C_2 + A$$

Siendo $C_2 = (9-2)A$, queda:

$$13.500 = 0{,}05 \times 7A + A \Rightarrow A = 10.000$$

En consecuencia, $C_0 = 9A = 90.000$ €, y el saldo al principio del sexto año es:

$$C_5 = C_0 - 5A = 90.000 - 50.000 = 40.000 \text{ €}$$

11.5. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Las cuotas de amortización séptima y novena de un préstamo francés de duración 12 años ascienden, respectivamente, a 5.051,52 € y 5.569,30 €. Hallar el saldo al final del octavo año.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Como las cuotas de amortización en el préstamo francés varían en progresión geométrica de razón $1 + i$, si relacionamos la cuotas de amortización séptima y novena podemos hallar el tipo de interés anual del préstamo:

$$A_9 = A_7(1 + i)^2 \Rightarrow 5.569{,}30 = 5.051{,}52(1 + i)^2 \Rightarrow i = 0{,}05$$

Con el tipo de interés y una cuota de amortización podemos hallar la primera cuota de amortización:

$$A_7 = A_1(1 + i)^6 \Rightarrow 5.051{,}52 = A_1(1 + 0{,}05)^6 \Rightarrow A_1 = 3.769{,}52$$

Y a través de A_1 calculamos el saldo en 8 como diferencia entre la cuantía del préstamo y el capital amortizado hasta el final del año 8:

$$C_8 = C_0 - M_8^e = A_1 \times s_{\overline{n}|i} - A_1 \times s_{\overline{8}|i} = 3.769{,}52 \times s_{\overline{12}|0{,}05} - 3.769{,}52 \times s_{\overline{8}|0{,}05} =$$

$$= 24.004{,}37 \text{ €}$$

2. Un préstamo francés se amortiza al 4% anual en 8 años. Sabiendo que el capital amortizado hasta el cuarto año es 41.477,36 €, hallar la cuantía del término amortizativo.

Resolución

A través del capital total amortizado podemos hallar la primera cuota de amortización:

$$M_4^e = A_1 \times s_{\overline{4}|i} \Rightarrow 41.477{,}36 = A_1 \times s_{\overline{4}|0{,}04} \Rightarrow A_1 = 9.767{,}51$$

Con dicha cuota podemos calcular el principal del préstamo:

$$C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i} = 9.767{,}51 \times s_{\overline{8}|0{,}04} = 90{,}000{,}05$$

A través de la ecuación de equivalencia financiera del préstamo obtenemos el término amortizativo constante:

$$C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 90.000{,}05 = a \times a_{\overline{8}|0{,}04} \Rightarrow a = 13.367{,}51 \text{ €}.$$

3. Sea una operación de préstamo americano de 150.000 € a amortizar en 15 años al 4% anual, en la que el prestatario, a fin de disponer del principal del préstamo al final de su duración, realiza una operación de constitución al 2,5% anual. Hallar la cuantía anual total que periódicamente el prestatario desembolsa por las dos operaciones.

© Ediciones Pirámide

Resolución

Anualmente el prestatario paga los intereses del préstamo y realiza una dotación al fondo de constitución de cuantía f. Por tanto, para calcular la cuantía total que desembolsa anualmente a', hemos de hallar primero f:

$$C_0 = f \times S_{\overline{n}|i'} \Rightarrow 150.000 = f \times s_{\overline{15}|0,025} \Rightarrow f = 8.364,97$$

Consecuentemente:

$$a' = C_0 \times i + f = 150.000 \times 0,04 + 8.364,97 = 14.364,97 \text{ €}$$

4. Si en un préstamo amortizable al 5,5% anual, con cuota de amortización constante, el saldo al principio del año 5 es de 80.000 € y el capital total amortizado hasta el final del año 9 es de 90.000 €, hallar el importe de la cuota de interés del año 1.

Resolución

A través del capital total amortizado podemos hallar la cuantía de la cuota de capital:

$$M_9^e = 9 \times A \Rightarrow A = \frac{90.000}{9} = 10.000$$

El capital vivo al final del año 4, en función de la cuota de amortización, verifica:

$$C_4 = (n - 4)A \Rightarrow 80.000 = (n - 4)10.000 \Rightarrow n = 12.$$

Por tanto, se trata de un préstamo de duración 12 años, y su cuantía es:

$$C_0 = 10.000 \times 12 = 120.000$$

La cuota de interés del primer año asciende a:

$$I_1 = 120.000 \times 0,055 = 6.600 \text{ €}$$

5. Se sabe que en un préstamo amortizable al 6% anual, con cuota de amortización constante, la cuantía del primer término amortizativo es 12.650 €, y el saldo al principio del año 7 asciende a 55.000 €. Calcular el importe del penúltimo término amortizativo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El penúltimo término amortizativo lo podemos hallar como:

$$a_{n-1} = A + I_{n-1} = A + C_{n-2} \times i = A + 2 \times A \times i$$

Por tanto, para su cálculo necesitamos conocer el importe de la cuota de capital, la cual obtendremos a partir de los datos del enunciado.

Sabemos que el primer término amortizativo verifica:

$$a_1 = A + I_1 = A + C_0 \times i = A + n \times A \times i = A(1 + n \times i) \Rightarrow 12.650 = A(1 + 0{,}06n)$$

Despejando A de la ecuación anterior, tenemos:

$$A = \frac{12.650}{1 + 0{,}06n}$$

A su vez, el capital vivo al principio del año 7 se puede obtener como:

$$C_6 = (n - 6)A \quad \Rightarrow \quad 55.000 = (n - 6)A$$

Si sustituimos en esta ecuación la cuota de amortización por la expresión hallada anteriormente, obtenemos el número de años de duración del préstamo:

$$55.000 = (n - 6)\frac{12.650}{1 + 0{,}06n} \quad \Rightarrow \quad n = 14$$

Una vez conocida la duración del préstamo podemos hallar el importe de la cuota de capital:

$$A = \frac{12.650}{1 + 0{,}06 \times 14} = 6.875$$

lo cual ya nos permitirá calcular el importe del penúltimo término amortizativo:

$$a_{n-1} = 6.875(1 + 2 \times 0{,}06) = 7.700\ €$$

11.6. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Sea un préstamo francés de 90.000 € a amortizar en 12 años al 6% anual. Calcular: *a*) el capital amortizado hasta el final del año 10; *b*) el saldo al principio del octavo año, y *c*) la quinta cuota de amortización.

© Ediciones Pirámide

2. En un préstamo amortizable al 5% anual, por el método francés, se sabe que la cuota de amortización del décimo año y el saldo al principio del séptimo año ascienden a 8.527,96 € y 92.658,50 €, respectivamente. Calcular el importe de la cuota de interés del tercer año.

3. Se sabe que el importe de 6.300 € corresponde a la cuota de interés del tercer año de un préstamo que se amortiza al 7% anual, con términos anuales durante 10 años, por el método americano. Además, el prestatario con el fin de constituir al final de los 10 años la cuantía del préstamo, contrata, a su vez, una operación de constitución, al 3,0301% anual, con cuantías cuatrimestrales pospagables constantes. Determinar el saldo neto de la operación conjunta al final del sexto año.

4. Si en un préstamo americano con fondo, de 10 años de duración, el saldo neto de la operación conjunta al final del quinto año es 60.130,72 € y el tipo de interés de la operación de constitución es el 3% anual, hallar la cuantía del préstamo.

5. Sea una operación de préstamo, al 4% de interés anual, amortizable con cuota de amortización constante anual de 9.500 €. Si el saldo al principio del octavo año es 28.500 €, calcular el capital del préstamo.

6. En un préstamo de cuota anual de capital constante, los saldos al principio de los años 7 y 9 son, respectivamente, 60.000 € y 40.000 €. Hallar su duración.

7. En un determinado préstamo amortizable al 6% anual en 12 años, a través de términos amortizativos anuales constantes, se conoce que el capital amortizado desde el cuarto año hasta el octavo (ambos inclusive) es 37.409,94 €. Hallar: *a*) la cuota de amortización del tercer año y *b*) el principal del préstamo.

8. Sea un préstamo pactado a un tipo de interés anual i, amortizable en 10 años, de la siguiente forma: los primeros cuatro años a través de cuotas de capital constantes de 8.000 €, y el resto de los años con términos amortizativos constantes. Si se sabe que los importes de las cuotas de amortización que se abonan en el sexto y octavo año son, respectivamente, 10.497,05 € y 11.573 €, hallar la cuota de interés del tercer año.

© Ediciones Pirámide

12 Otros métodos de amortización de préstamos

OBJETIVOS

- Describir y analizar las características básicas y las relaciones específicas en los préstamos con términos variables en progresión geométrica, en progresión aritmética, en las operaciones de amortización con intereses fraccionados y en los préstamos con intereses anticipados.
- Analizar las operaciones de amortización de préstamos en el caso de existir períodos de carencia o de diferimiento.

SUMARIO

12.1. Introducción.
12.2. Amortización con términos variables en progresión geométrica.
12.3. Amortización con términos variables en progresión aritmética.
12.4. Amortización con intereses fraccionados.
12.5. Amortización con períodos de carencia y de diferimiento.
12.6. Amortización con intereses anticipados.
12.7. Ejercicios y problemas resueltos.
12.8. Ejercicios y problemas propuestos.

12.1. INTRODUCCIÓN

La amortización de un préstamo con contraprestación múltiple se puede plantear con cualquier modalidad de renta, atendiendo su estudio, en términos generales, a lo especificado en la lección 10. No obstante, aparte de los métodos clásicos de amortización de préstamos analizados en la lección 11, también destacamos los préstamos amortizables a través de términos amortizativos variables en progresión geométrica, en progresión aritmética, los amortizables con intereses fraccionados y los préstamos con pago de intereses anticipados. Dada la peculiaridad de estos préstamos, en esta lección vamos a estudiar las características generales de cada uno de ellos.

12.2. AMORTIZACIÓN CON TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN GEOMÉTRICA

Un préstamo amortizable con términos variables en progresión geométrica se caracteriza por ser una operación financiera en la que cada término amortizativo, excepto el primero, es igual al anterior multiplicado por una cuantía constante q denominada razón: $a_s = a_{s-1} \times q$, siendo a_s y a_{s-1} los términos amortizativos de los períodos s y $s - 1$, respectivamente. Si expresamos el término amortizativo del período s en función del correspondiente al primer período a_1, tenemos: $a_s = a_1 \times q^{s-1}$. Además, para que la operación de préstamo sea posible, todos los términos amortizativos deben ser positivos, por lo que la razón q necesariamente ha de ser positiva. El gráfico de la operación de préstamo descrita es el siguiente:

© Ediciones Pirámide

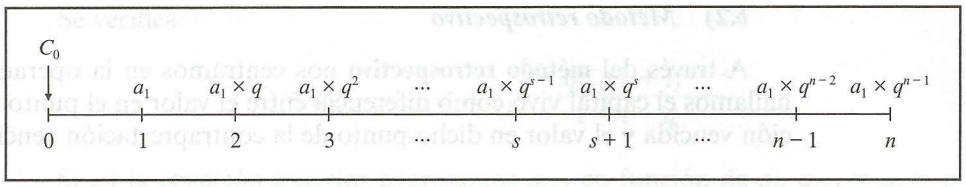


Figura 12.1.

A continuación vamos a plantear la ecuación de equivalencia financiera, el saldo financiero o capital vivo, la ley de variación de las cuotas de amortización y el capital total amortizado en un préstamo amortizable con las características señaladas en el caso particular de que el tipo de interés sea constante.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

Al constituir los términos amortizativos una renta variable en progresión geométrica, la cuantía del préstamo C_0 verifica:

$$C_0 = A_{(a_1, q)\overline{n}|i} = a_1 \frac{\left[1 - \frac{q^n}{(1+i)^n}\right]}{1 + i - q} = a_1 \frac{1 - q^n(1+i)^{-n}}{1 + i - q}$$

En la hipótesis particular en la que los términos amortizativos varían con razón $q = 1 + i$, la ecuación de equivalencia financiera es:

$$C_0 = A_{(a_1,\, q=1+i)\overline{n}|i} = \frac{a_1 \times n}{1 + i}$$

b) Capital vivo o saldo financiero

El capital vivo en un determinado momento del tiempo se puede hallar a través de los distintos métodos estudiados en la lección 10, esto es, recurrente, retrospectivo y prospectivo.

*b.*1) *Método recurrente*

Con el **método recurrente** podemos calcular el capital vivo al final de un período s a partir del capital vivo al principio de dicho período:

$$C_s = C_{s-1}(1 + i) - a_s = C_{s-1}(1 + i) - a_1 \times q^{s-1}$$

© Ediciones Pirámide

b.2) Método retrospectivo

A través del **método retrospectivo** nos centramos en la operación vencida y hallamos el capital vivo como diferencia entre el valor en el punto s de la prestación vencida y el valor en dicho punto de la contraprestación vencida:

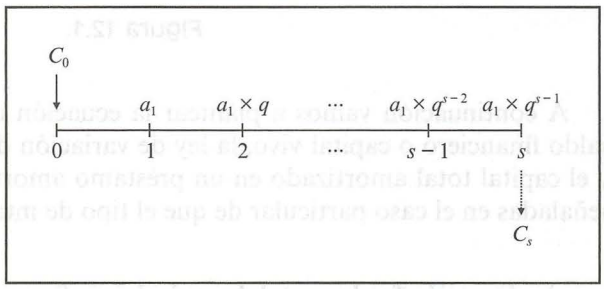


Figura 12.2.

Analíticamente:

$$C_s = C_0(1+i)^s - S_{(a_1,\,q)\overline{s}|i} = C_0(1+i)^s - a_1\frac{1-q^s(1+i)^{-s}}{1+i-q}(1+i)^s$$

Si los términos amortizativos varían con razón $q = 1 + i$, la expresión que permite obtener el saldo por el método retrospectivo es la siguiente:

$$C_s = C_0(1+i)^s - S_{(a_1,\,q=1+i)\overline{s}|i} = C_0(1+i)^s - \frac{a_1 \times s}{1+i}(1+i)^s$$

b.3) Método prospectivo

Mediante el **método prospectivo,** el capital vivo al final del período s es el valor en dicho punto de la contraprestación futura:

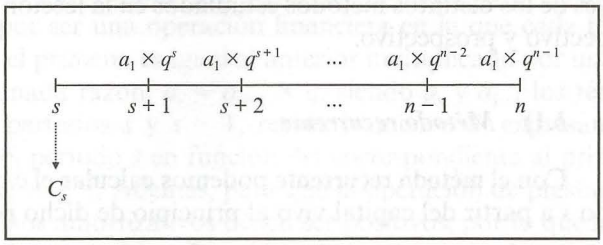


Figura 12.3.

© Ediciones Pirámide

Se verifica:

$$C_s = A_{(a_{s+1},\, q)\overline{n-s}|i} = a_{s+1}\frac{1 - q^{n-s}(1+i)^{-(n-s)}}{1 + i - q}$$

Si en la ecuación anterior expresamos a_{s+1} en función de a_1, $a_{s+1} = a_1 \times q^s$, tenemos:

$$C_s = a_1 \times q^s \frac{1 - q^{n-s}(1+i)^{-(n-s)}}{1 + i - q}$$

En la hipótesis de que los términos amortizativos varíen con razón $q = 1 + i$, la expresión que permite obtener el saldo por el método prospectivo es:

$$C_s = A_{(a_{s+1},\, q=1+i)\overline{n-s}|i} = \frac{a_1 \times q^s(n-s)}{1+i} = \frac{a_{s+1}(n-s)}{1+i}$$

c) Ley de variación de las cuotas de amortización

Si aplicamos la ecuación dinámica de amortización en dos períodos consecutivos y calculamos la diferencia de ambas expresiones, obtenemos la ley de variación de las cuotas de amortización:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$$

$$\left.\begin{array}{l} C_{s+1} = C_s(1+i) - a_{s+1} \\ \underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{C_{s-1} - C_s}_{A_s}(1+i) - a_s + a_{s+1} \end{array}\right\} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) - a_s + a_{s+1} \quad \Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) - a_s(1-q)$$

d) Capital total amortizado

El capital total amortizado hasta un determinado momento s, M_s^e, lo podemos hallar bien como la suma de las cuotas de amortización vencidas hasta dicho momento o bien como diferencia aritmética entre la cuantía del préstamo y el capital vivo en dicho punto: $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = C_0 - C_s$.

EJERCICIO 12.1

Sea un préstamo de 60.000 € a amortizar en 8 años, a un tipo de interés del 4,5% anual, mediante términos amortizativos anuales que crecen un 3% cada año.

© Ediciones Pirámide

Calcular: *a*) la cuantía del tercer término amortizativo; *b*) el capital pendiente de amortizar al final del año 4 a través del método retrospectivo; *c*) el saldo al final del año 5 a través del método prospectivo; *d*) la cuota de amortización del año 5, y *e*) el capital amortizado hasta el final del año 5.

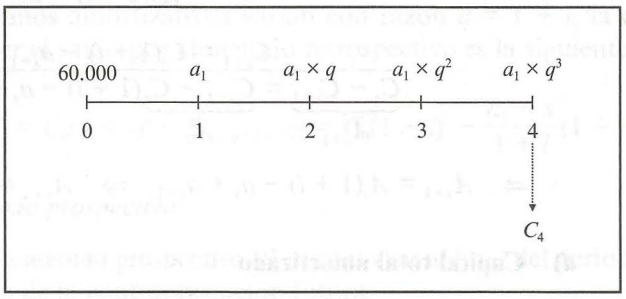
Resolución

a) Los términos amortizativos varían en progresión geométrica de razón $q = 1{,}03$. Para hallar el tercer término amortizativo, necesitamos conocer el primero: $a_3 = a_1 \times q^2$. A fin de calcular a_1 planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$C_0 = A_{(a_1,\, q=1{,}03)\overline{8}|0{,}045} \Rightarrow 60.000 = a_1 \frac{1 - 1{,}03^8 \times 1{,}045^{-8}}{1 + 0{,}045 - 1{,}03} \Rightarrow a_1 = 8.239{,}79.$$

Siendo: $a_3 = 8.239{,}79 \times 1{,}03^2 = 8.741{,}59$ €.

b) Para calcular el capital vivo al final del año 4 a través del método retrospectivo, hallamos la diferencia entre el valor financiero en 4 de la prestación y la contraprestación vencidas:

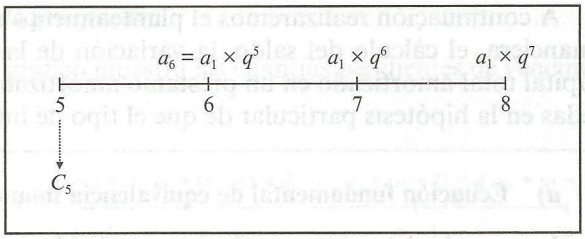


$$C_4 = 60.000(1 + 0{,}045)^4 - S_{(a_1,\, q=1{,}03)\overline{4}|0{,}045}$$

$$C_4 = 60.000 \times 1{,}045^4 - 8.239{,}79 \frac{1 - 1{,}03^4 \times 1{,}045^{-4}}{1{,}045 - 1{,}03} \times 1{,}045^4 = 34.741{,}34\ €$$

c) Para hallar el capital pendiente de amortizar al final del año 5 mediante el método prospectivo, tenemos que calcular en dicho punto la suma financiera de los términos amortizativos pendientes de vencimiento, es decir, el valor actual de la renta constituida por los términos amortizativos no vencidos:

© Ediciones Pirámide



$$C_5 = A_{(a_6,\, q=1{,}03)\overline{8-5}|0{,}045} = 8.239{,}79 \times 1{,}03^5 \frac{1 - 1{,}03^3 \times 1{,}045^{-3}}{1{,}045 - 1{,}03} = 27.030{,}78 - 57\ €$$

d) La cuota de amortización del año 5 la podemos hallar detrayendo al quinto término amortizativo la cuota de interés de dicho año: $A_5 = a_5 - I_5 = a_1 \times q^4 - C_4 \times i \Rightarrow A_5 = 8.239{,}79 \times 1{,}03^4 - 34.741{,}34 \times 0{,}045 = 7.710{,}60$ €.

e) El capital amortizado hasta el año 5 lo podemos obtener como diferencia entre la cuantía del préstamo y el saldo vivo en dicho punto: $M_5^e = C_0 - C_5 = 60.000 - 27.030{,}77 = 32.969{,}23$ €.

12.3. AMORTIZACIÓN CON TÉRMINOS VARIABLES EN PROGRESIÓN ARITMÉTICA

Un préstamo amortizable con términos variables en progresión aritmética es aquel en el que cada término, excepto el primero, es igual al anterior incrementado en una cuantía constante d denominada razón: $a_s = a_{s-1} + d$, siendo a_s y a_{s-1} los términos amortizativos de los períodos s y $s - 1$, respectivamente. En consecuencia, cualquier término amortizativo puede expresarse en función del primero: $a_s = a_1 + (s - 1) \times d$.

La razón d puede tomar valores negativos, debiéndose verificar en este caso que todos los términos amortizativos sean positivos, para que la operación financiera pueda realizarse. Por tanto, dado que $a_1 > 0$, si la razón d es negativa, se debe cumplir que $a_n > 0$: $a_n = a_1 + (n - 1) \times d > 0$.

El gráfico de esta operación es el siguiente:

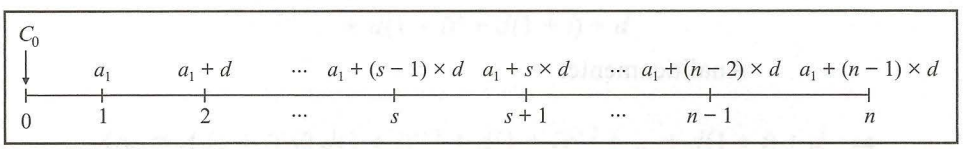


Figura 12.4.

© Ediciones Pirámide

A continuación realizaremos el planteamiento de la ecuación de equivalencia financiera, el cálculo del saldo, la variación de las cuotas de amortización y el capital total amortizado en un préstamo amortizable con las características señaladas en la hipótesis particular de que el tipo de interés sea constante.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

La cuantía del préstamo C_0 es igual al valor actual de una renta variable en progresión aritmética, valorada en capitalización compuesta al tipo de interés i:

$$C_0 = A_{(a_1,\, d)\overline{n}|i} = \left(a_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

b) Capital vivo o saldo financiero

b.1) *Método recurrente*

De acuerdo con este método, podemos calcular el saldo al final de un período s a través de la siguiente igualdad: $C_s = C_{s-1}(1 + i) - a_s$.

b.2) *Método retrospectivo*

Para calcular el saldo por este método, consideramos la parte de la operación vencida:

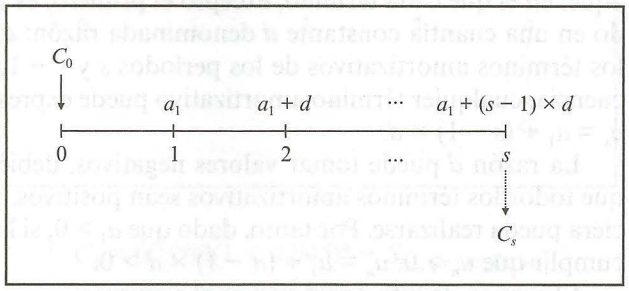


Figura 12.5.

Analíticamente:

$$C_s = C_0(1 + \mathrm{i})^s - S_{(a_1,\, d)\overline{s}|i} = C_0(1 + \mathrm{i})^s - \left[\left(a_1 + d \times s + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{s}|i} - \frac{d \times s}{i}\right](1 + i)^s$$

© Ediciones Pirámide

b.3) Método prospectivo

El siguiente gráfico muestra las cuantías pendientes de vencimiento al final del período s:

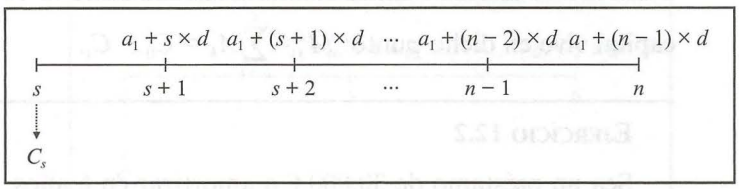


Figura 12.6.

Se verifica:

$$C_s = A_{(a_{s+1},\, d)\overline{n-s}|i} = \left[a_{s+1} + d(n-s) + \frac{d}{i}\right] \times a_{\overline{n-s}|i} - \frac{d(n-s)}{i}$$

c) Ley de variación de las cuotas de amortización

Si calculamos la diferencia entre la ecuación dinámica de amortización para dos períodos consecutivos, tenemos:

$$C_s = C_{s-1}(1+i) - a_s$$

$$C_{s+1} = C_s(1+i) - a_{s+1}$$

$$\underbrace{C_s - C_{s+1}}_{A_{s+1}} = \underbrace{(C_{s-1} - C_s)}_{A_s}(1+i) - a_s + a_{s+1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) - a_s + a_s + d \quad \Rightarrow \quad A_{s+1} = A_s(1+i) + d$$

Teniendo en cuenta cómo varían las cuotas de amortización, también podemos hallar la cuota de amortización del período $s+1$ en función de la primera cuota:

$$A_2 = A_1(1+i) + d$$

$$A_3 = A_2(1+i) + d = [A_1(1+i) + d](1+i) + d = A_1(1+i)^2 + d(1+i) + d$$

$$A_4 = A_3(1+i) + d = [A_1(1+i)^2 + d(1+i) + d](1+i) + d = A_1(1+i)^3 + d(1+i)^2 + d(1+i) + d$$

$$\vdots$$

$$A_{s+1} = A_1(1+i)^s + d(1+i)^{s-1} + d(1+i)^{s-2} + \ldots + d(1+i) + d \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad A_{s+1} = A_1(1+i)^s + d \times s_{\overline{s}|i}$$

© Ediciones Pirámide

d) Capital total amortizado

El capital total amortizado hasta un determinado momento s, M_s^e, lo podemos hallar bien como la suma de las cuotas de amortización vencidas hasta dicho momento o bien como diferencia aritmética entre la cuantía del préstamo y el capital vivo en dicho punto: $M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = C_0 - C_s$.

EJERCICIO 12.2

Sea un préstamo de 30.000 € a amortizar en 6 años, a un tipo de interés del 4% anual, mediante términos amortizativos anuales que aumentan cada año en 300 €. Calcular: *a*) la cuantía del primer término amortizativo; *b*) el capital vivo al final del año 3 a través del método retrospectivo; *c*) el saldo al final del año 4 a través del método prospectivo; *d*) la cuota de amortización del año 5, y *e*) el capital amortizado hasta el final del año 4.

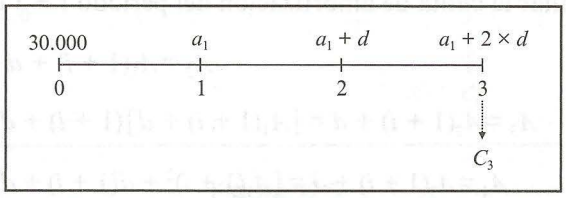
Resolución

a) Los términos amortizativos varían en progresión aritmética de razón $d = 300$. Para hallar el primer término a_1 planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen:

$$C_0 = A_{(a_1,\, d=300)\overline{6}|0,04} \Rightarrow 30.000 = \left(a_1 + 300 \times 6 + \frac{300}{0,04}\right) \times$$

$$\times\, a_{\overline{6}|0,04} - \frac{300 \times 6}{0,04} \Rightarrow a_1 = 5.007,14\ €$$

b) Para calcular el capital vivo al final del año 3 mediante el método retrospectivo calculamos la diferencia entre el valor financiero en 3 de la prestación y el de la contraprestación vencidas:



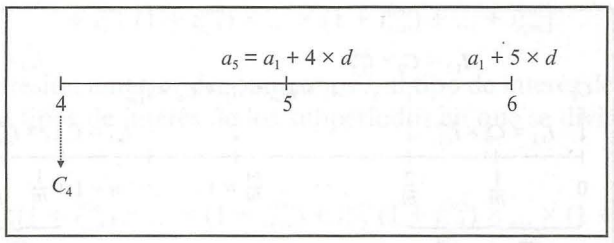
$$C_3 = 30.000 \times (1 + 0,04)^3 - S_{(a_1,\, d=300)\overline{3}|0,04}$$

$$C_3 = 30.000 \times 1,04^3 - \left[\left(5.007,14 + 300 \times 3 + \frac{300}{0,04}\right) \times a_{\overline{3}|0,04} - \frac{300 \times 3}{0,04}\right] \times$$

$$\times\, 1,04^3 = 17.203,63\ €$$

© Ediciones Pirámide

c) El saldo al final del año 4 a través del método prospectivo lo calculamos como el valor financiero en 4 de la renta constituida por los términos amortizativos pendientes de vencer:



$$C_4 = A_{(a_5,\, d=300)\overline{6-4}|0,04} = \left[(5.007,14 + 300 \times 4) + 300 \times 2 + \frac{300}{0,04}\right] \times$$

$$\times\, a_{\overline{2}|0,04} - \frac{300 \times 2}{0,04} = 11.984,62\ €$$

d) La cuota de amortización del año 5 la podemos hallar a través de la correspondiente al primer año: $A_5 = A_1(1 + i)^4 + d \times s_{\overline{4}|i}$. Para ello primero calcularemos A_1: $A_1 = a_1 - I_1 = a_1 - C_0 \times i = 5.007,14 - 30.000 \times 0,04 = 3.807,14$. Por tanto, $A_5 = 3.807,14 \times 1,04^4 + 300 \times s_{\overline{4}|0,04} = 5.727,75$ €.

e) El capital amortizado hasta el final del año 4 lo obtenemos a través de la siguiente expresión: $M_4^e = C_0 - C_4 = 30.000 - 11.984,62 = 18.015,38$ €.

12.4. AMORTIZACIÓN CON INTERESES FRACCIONADOS

12.4.1. Planteamiento general

La amortización de préstamos con intereses fraccionados se caracteriza por presentar una periodicidad en el pago de las cuotas de interés inferior a la periodicidad en el pago de las cuotas de amortización. Por tanto, este método implica lo siguiente:

a) Cada período se divide en m subperíodos.

b) Al final de cada uno de los subperíodos se abona una cuota de interés: $I_{s,h} = C_{s-1} \times i_{s,h}^{(m)}$, siendo $I_{s,h}$ la cuota de interés que se abona al final del subperíodo h, dentro del período s, e $i_{s,h}^{(m)}$ es el tipo de interés para dicho subperíodo h de amplitud $\frac{1}{m}$.

© Ediciones Pirámide

c) Las cuotas de amortización se abonan al final de cada uno de los períodos.

El gráfico de esta operación es el siguiente:

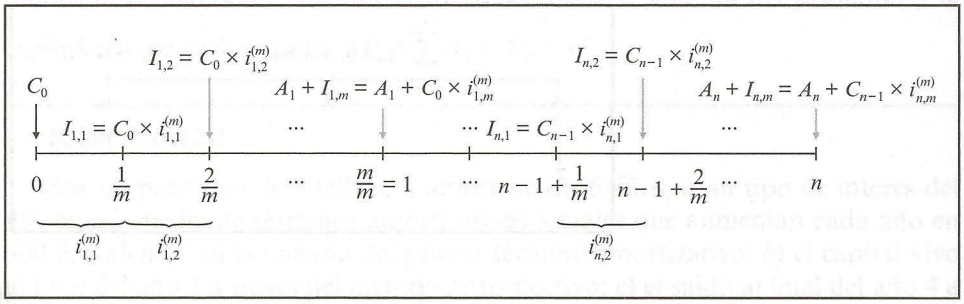


Figura 12.7.

Por tanto, en este tipo de préstamos, en cada período se abonan m términos amortizativos pospagables (uno al final de cada subperíodo), siendo los $m - 1$ primeros términos iguales a la cuota de interés del subperíodo correspondiente, mientras que el término amortizativo del final del período (subperíodo m) incluye además la cuota de amortización. De esta forma, la cuantía del término amortizativo $a_{s,h}$ que se abona en cada uno de los subperíodos del período s es:

$$a_{s,h} = \begin{cases} I_{s,h} = C_{s-1} \times i^{(m)}_{s,h}; \mid h = 1,2, ..., m-1 \\ I_{s,h} + A_s = C_{s-1} \times i^{(m)}_{s,h}\ A_s; \mid h = m \end{cases}$$

A efectos de simplificar el estudio de este tipo de préstamos vamos a hallar el valor financiero al final del período s de las m cuotas de interés que se abonan a lo largo de dicho período:

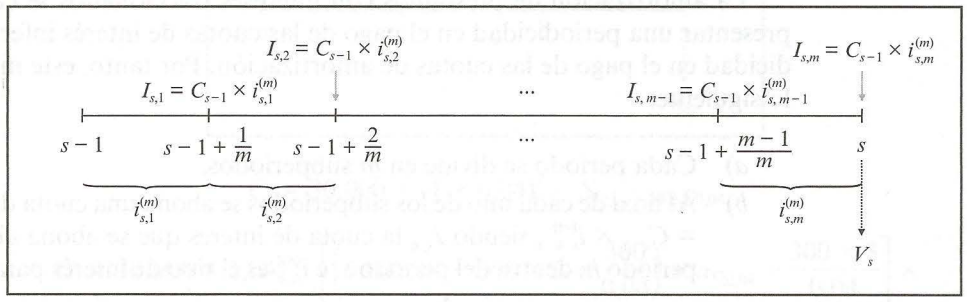


Figura 12.8.

© Ediciones Pirámide

$$V_s = C_{s-1} \times i_{s,1}^{(m)}(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + C_{s-1} \times i_{s,2}^{(m)}(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times$$

$$\times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + ... + C_{s-1} \times i_{s,m}^{(m)} = C_{s-1}[i_{s,1}^{(m)}(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) +$$

$$+ i_{s,2}^{(m)}(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + ... + i_{s,m}^{(m)}]$$

Si en la expresión anterior denominamos i_s al tipo de interés del período equivalente a los m tipos de interés de los subperíodos en que se divide el período s, tenemos:

$$i_s = i_{s,1}^{(m)}(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + i_{s,2}^{(m)}(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)}) + ... + i_{s,m}^{(m)}$$

Por consiguiente, se verifica: $V_s = C_{s-1} \times i_s$.

Otra forma de obtener el tipo i_s es aplicando la relación entre tantos equivalentes en capitalización compuesta:

$$1 + i_s = (1 + i_{s,1}^{(m)})(1 + i_{s,2}^{(m)})(1 + i_{s,3}^{(m)}) \times ... \times (1 + i_{s,m}^{(m)})$$

Si el tipo de interés de los superíodos permanece constante a lo largo del período, se verifica: $i_{s,h}^{(m)} = i_{s,1}^{(m)} = i_{s,2}^{(m)} = ... = i_{s,m}^{(m)} = i_s^{(m)} \Rightarrow i_{s,h}^{(m)} = i_s^{(m)}; \mid h = 1, 2, ..., m$, pudiéndose obtener el tipo de interés del período i_s equivalente a los m tipos de interés de los subperíodos a través de la siguiente expresión:

$$i_s = i_s^{(m)}(1 + i_s^{(m)})^{m-1} + i_s^{(m)}(1 + i_s^{(m)})^{m-2} + i_s^{(m)}(1 + i_s^{(m)})^{m-3} + ... + i_s^{(m)} = i_s^{(m)} \times s_{\overline{m}|i_s^{(m)}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad i_s = i_s^{(m)} \times s_{\overline{m}|i_s^{(m)}} = i_s^{(m)} \frac{(1 + i_s^{(m)})^m - 1}{i_s^{(m)}} = (1 + i_s^{(m)})^m - 1$$

Y por tanto: $(1 + i_s) = (1 + i_s^{(m)})^m$.

De acuerdo con lo expuesto podemos sustituir las m cuotas de interés de cada uno de los subperíodos por el valor de su suma financiera al final de cada período (para el período s sería $I_s = C_{s-1} \times i_s$). El gráfico resultante es:

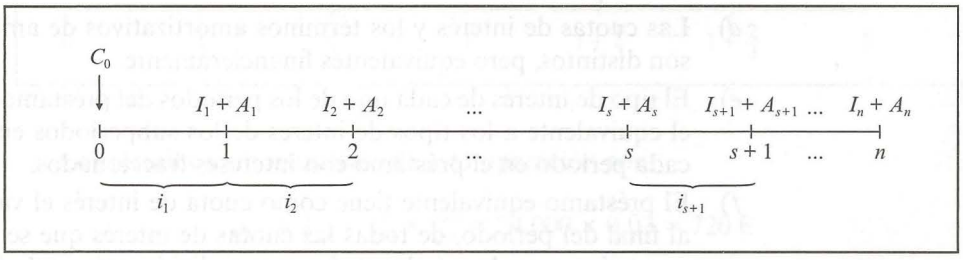


Figura 12.9.

© Ediciones Pirámide

La sustitución del conjunto de las m cuotas de interés en cada período por una única cuota de interés equivalente al final del período no altera la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación. En consecuencia, se pone de manifiesto que también podemos considerar que el préstamo se amortiza con n términos amortizativos de cuantías $a_s = C_{s-1} \times i_s + A_s$, con vencimiento al final de cada período s, que constituyen los términos amortizativos de un **préstamo equivalente** al préstamo con intereses fraccionados. Se tiene, pues, que cada término amortizativo del préstamo equivalente es el valor financiero al final del período respectivo de todos los términos amortizativos que vencen a lo largo de dicho período en el préstamo con intereses fraccionados.

Es importante resaltar que la sustitución del conjunto de las m cuotas de interés en cada período por una única cuota de interés equivalente al final del período, si bien no altera la equivalencia financiera entre la prestación y la contraprestación, sí modifica la dinámica de la amortización, dado que el préstamo equivalente supone que se abonan términos amortizativos con la periodicidad de la unidad de tiempo, mientras que en el préstamo con intereses fraccionados su periodicidad es $\frac{1}{m}$.

De acuerdo con lo señalado, como en ambos préstamos (préstamo con intereses fraccionados y préstamo equivalente) las cuotas de amortización se abonan al final de cada período, el importe del saldo o capital vivo, de las cuotas de amortización y del capital total amortizado, es el mismo en los dos préstamos. Por tanto, para determinar dichas magnitudes en un préstamo con intereses fraccionados, podemos realizarlo a través del planteamiento de su préstamo equivalente, pudiendo aplicar a este préstamo las expresiones generales vistas en las lecciones anteriores.

Las relaciones existentes entre el préstamo con intereses fraccionados y su préstamo equivalente podemos resumirlas en las siguientes:

a) El saldo o capital vivo en un determinado punto s es el mismo en ambos préstamos.

b) Las cuotas de amortización son idénticas en ambos casos.

c) El capital total amortizado hasta un determinado punto s coincide en ambos préstamos.

d) Las cuotas de interés y los términos amortizativos de ambos préstamos son distintos, pero equivalentes financieramente.

e) El tipo de interés de cada uno de los períodos del préstamo equivalente es el equivalente a los tipos de interés de los subperíodos en que se divide cada período en el préstamo con intereses fraccionados.

f) El préstamo equivalente tiene como cuota de interés el valor financiero, al final del período, de todas las cuotas de interés que se abonan en los respectivos m subperíodos en los que se divide cada período en el préstamo con intereses fraccionados.

© Ediciones Pirámide

g) El préstamo equivalente tiene como término amortizativo en cada período el valor financiero al final del período de todos los pagos (términos amortizativos) que se realizan a lo largo del período en el préstamo con intereses fraccionados.

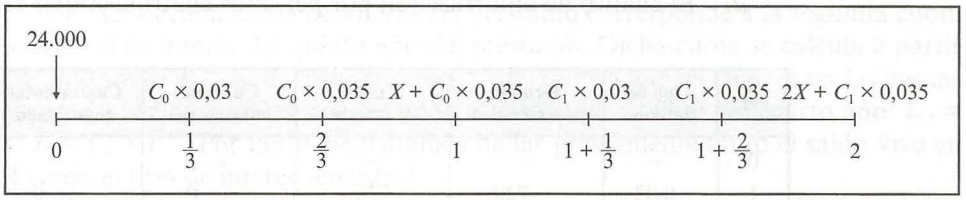
EJERCICIO 12.3

Sea un préstamo de 24.000 € a amortizar en 2 años, con pago de intereses cuatrimestrales y cuotas de amortización anuales iguales a X y a $2X$ para el primer y segundo año, respectivamente. El tipo de interés pactado es el 3% cuatrimestral para el primer cuatrimestre de cada año y el 3,5% cuatrimestral para el segundo y el tercer cuatrimestre de cada año. Se pide: *a*) la cuantía de las cuotas de amortización; *b*) los importes que abona el prestatario; *c*) los términos amortizativos del préstamo equivalente, y *d*) el cuadro de amortización.

Resolución

a) La cuantía del préstamo se amortiza a través de dos cuotas de amortización anuales, siendo una el doble de la otra, por lo que se verifica: $24.000 = X + 2X \Rightarrow X = 8.000$, siendo la primera cuota de amortización de 8.000 € y la segunda de 16.000 €.

b) Al ser las cuotas de amortización anuales y las cuotas de interés cuatrimestrales, tenemos que el importe de los términos amortizativos correspondientes a los dos primeros cuatrimestres de cada año coincide con el de la cuota de interés, mientras que los términos amortizativos del último cuatrimestre de cada año son iguales a la suma de la cuota de interés cuatrimestral y la cuota de amortización anual. El gráfico de la operación es el siguiente:



Los términos amortizativos de esta operación son:

$$a_{1,1} = I_{1,1} = C_0 \times i_{1,1}^{(m)} = 24.000 \times 0{,}03 = 720 \text{ €}$$

$$a_{1,2} = I_{1,2} = C_0 \times i_{1,2}^{(m)} = 24.000 \times 0{,}035 = 840 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

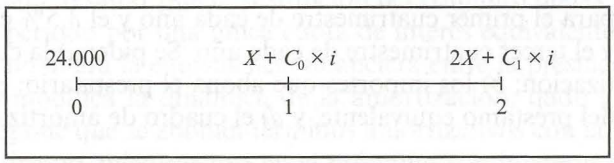
$$a_{1,3} = I_{1,3} + A_1 = C_0 \times i_{1,3}^{(m)} + X = 24.000 \times 0{,}035 + 8.000 = 8.840\ €$$

$$a_{2,1} = I_{2,1} = C_1 \times i_{2,1}^{(m)} = (24.000 - 8.000) \times 0{,}03 = 480\ €$$

$$a_{2,2} = I_{2,2} = C_1 \times i_{2,2}^{(m)} = 16.000 \times 0{,}035 = 560\ €$$

$$a_{2,3} = I_{2,3} + A_2 = C_1 \times i_{2,3}^{(m)} + 2X = 16.000 \times 0{,}035 + 16.000 = 16.560\ €$$

c) El préstamo anual equivalente es el siguiente:



Para calcular el importe de sus términos amortizativos, previamente hemos de hallar el tipo de interés anual equivalente a los tipos de interés cuatrimestrales. En este caso, como los tipos de interés cuatrimestrales para el año 1 son iguales a los del año 2, el tipo de interés anual equivalente será único, obteniéndose:

$$(1 + i) = (1 + 0{,}03)(1 + 0{,}035)^2 \Rightarrow i = 0{,}10336175$$

El importe de los términos amortizativos del préstamo equivalente es:

$$a_1 = I_1 + A_1 = C_0 \times i + X = 24.000 \times 0{,}10336175 + 8.000 = 10.480{,}68\ €$$

$$a_2 = I_2 + A_2 = C_1 \times i + 2X = 16.000 \times 0{,}10336175 + 16.000 = 17.653{,}79\ €$$

d) El cuadro de amortización por períodos cuatrimestrales es el siguiente:

Per.	Tipo de interés	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización	Capital total amortizado	Saldo o capital vivo
0	—	—	—	—	—	24.000
1	0,03	720	720	0	0	24.000
2	0,035	840	840	0	0	24.000
3	0,035	8.840	840	8.000	8.000	16.000
4	0,03	480	480	0	8.000	16.000
5	0,035	560	560	0	8.000	16.000
6	0,035	16.560	560	16.000	24.000	0

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.4

Sea un préstamo de 120.000 € a amortizar en 10 años, con pago de intereses semestrales y cuotas de amortización anuales variables en progresión aritmética de razón 1.000 €. Si el tipo de interés pactado es el 6% nominal anual pagadero semestralmente, hallar: *a*) el capital total amortizado en los ocho primeros años, y *b*) el importe de la décima cuota de interés.

Resolución

La cuantía del préstamo es la suma aritmética de las cuotas de amortización, y como éstas varían en progresión aritmética, se verifica:

$$C_0 = M_n^e = \frac{(A_1 + A_n) \times n}{2} = \frac{(A_1 + A_1 + 9 \times d) \times n}{2}$$

Por tanto:

$$M_n^e = 120.000 = \frac{(A_1 + A_1 + 9 \times 1.000) \times 10}{2} \Rightarrow A_1 = 7.500$$

a) El capital total amortizado en los ocho primeros años lo podemos hallar a través de la suma aritmética de las ocho primeras cuotas de amortización; teniendo en cuenta que tales cuotas varían en progresión aritmética de razón 1.000 €, tenemos:

$$M_8^e = \frac{(A_1 + A_8) \times 8}{2} = \frac{(A_1 + A_1 + 7 \times d) \times 8}{2} =$$

$$= \frac{(2 \times 7.500 + 7 \times 1.000) \times 8}{2} = 88.000 \text{ €}$$

b) La décima cuota de interés del préstamo corresponde a la segunda cuota semestral de interés del quinto año del préstamo. Dicha cuota se calcula a partir del saldo vivo al final del primer semestre del quinto año, el cual, al ser las cuotas de amortización anuales, coincide con el saldo vivo al final del cuarto año: $I_{5,2} = I_5 = C_4 \times i^{(m)}$. Por tanto, necesitamos hallar previamente tanto el saldo vivo en 4 como el tipo de interés semestral.

El saldo vivo en 4 lo podemos calcular como diferencia entre el principal del préstamo y el total amortizado hasta 4:

$$C_4 = C_0 - M_4^e = C_0 - \frac{(A_1 + A_4) \times 4}{2} = 120.000 -$$

$$- \frac{(7.500 + 7.500 + 3 \times 1.000) \times 4}{2} = 84.000$$

© Ediciones Pirámide

Si la operación se valora al 6% nominal pagadero semestralmente, el tipo de interés semestral es el 3%, pudiéndose hallar finalmente la décima cuota de interés del préstamo: $I_{5,2} = I_5 = C_4 \times i^{(m)} = 84.000 \times 0{,}03 = 2.520$ €.

12.4.2. Casos particulares

a) Préstamo con intereses fraccionados cuyo préstamo equivalente es un préstamo amortizable por el método francés

En este caso, la operación de préstamo amortizable con intereses fraccionados debe pactarse a un tipo de interés del subperíodo constante a lo largo de toda la operación, verificándose: $i^{(m)}_{s,h} = i^{(m)}; \mid h = 1, 2, ..., m; s = 1, 2, ..., n$, y además el valor financiero al final de cada período de todos los capitales con vencimiento en el mismo período es de cuantía constante: $a_s = a; \mid s = 1, 2, ..., n$. El gráfico de esta operación financiera es el siguiente:

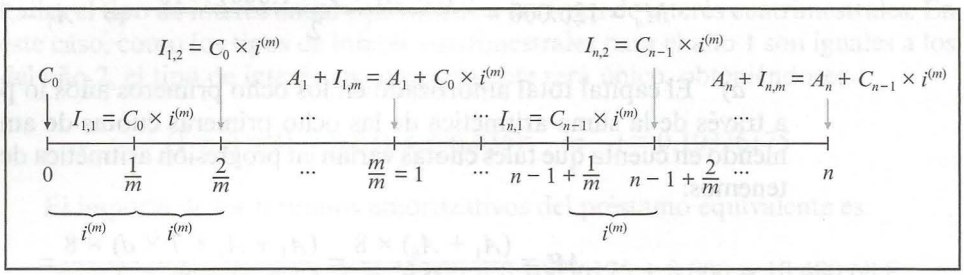


Figura 12.10.

Para un mismo período, las cuotas de interés de los respectivos subperíodos son constantes e iguales a: $I_{s,h} = C_{s-1} \times i^{(m)}; \forall h = 1,2, ..., m$.

El gráfico del préstamo equivalente es:

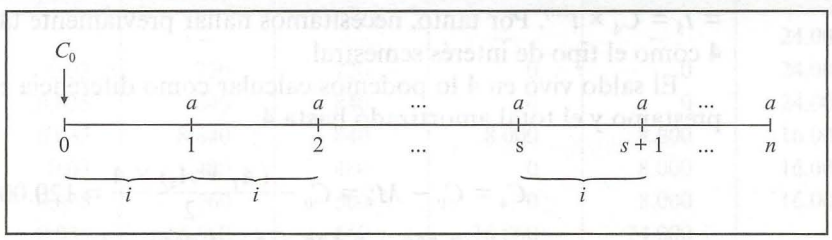


Figura 12.11.

© Ediciones Pirámide

Tal y como hemos demostrado anteriormente, la cuantía de cada término amortizativo del préstamo equivalente verifica $a_s = C_{s-1} \times i_s + A_s$. Y teniendo en cuenta que tanto el tipo de interés como el término amortizativo equivalente son constantes, se verifica: $a = C_{s-1} \times i + A_s$. En consecuencia, nos encontramos con un préstamo equivalente que se amortiza por el método francés, siéndole de aplicación todas las expresiones de dicho método.

EJERCICIO 12.5

Sea un préstamo de 40.000 € a amortizar en 4 años, con pago de intereses semestrales al 4% nominal anual, cuotas de amortización anuales, en el que el valor financiero al final de cada año de todos los pagos que se realizan en el mismo es constante. Calcular: *a*) la cuantía del primer término amortizativo; *b*) la cuota de amortización del año 1; *c*) la cuota de amortización del año 3; *d*) la cuota de interés del tercer y cuarto semestre; *e*) el saldo al final del año 2, y *f*) el capital amortizado hasta el final del año 3.

Resolución

a) El primer término amortizativo del préstamo pactado es el que se abona al final del primer semestre y es igual a la cuota de interés de dicho semestre, dado que las cuotas de amortización son anuales, no abonándose, por tanto, ninguna cuota de capital en el citado semestre. Para este cálculo necesitamos conocer el tipo de interés semestral, el cual lo hallaremos a partir del tanto nominal anual dado: $i^{(m)} = \dfrac{0{,}04}{2} = 0{,}02$. La cuantía del término amortizativo del primer semestre del año 1 es: $a_{1,1} = I_{1,1} + 0 = C_0 \times i_{1,1}^{(m)} = C_0 \times i^{(m)} = 40.000 \times 0{,}02 = 800$ €.

b) Esta operación de préstamo con intereses fraccionados, al pactarse con tipo de interés constante y con el requisito además de que el valor financiero a final de cada año de todos los términos amortizativos semestrales sea constante, presenta como préstamo equivalente un préstamo francés. Por tanto, para calcular la primera cuota de amortización vamos a basarnos en el préstamo francés equivalente, en el que se cumple: $M_n^e = C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i}$, siendo i el tipo de interés anual equivalente al 2% semestral: $(1 + i) = (1 + 0{,}02)^2 \Rightarrow i = 0{,}0404$. Por consiguiente, $40.000 = A_1 \times s_{\overline{4}|0{,}0404} \Rightarrow A_1 = 9.413{,}99$ €.

c) Si nos basamos en el préstamo equivalente francés, la cuota de amortización del año 3 la podemos obtener a partir de la primera cuota: $A_3 = A_1(1 + i)^{3-1} =$ $= 9.413{,}99 \times 1{,}0404^2 = 10.190{,}01$ €.

© Ediciones Pirámide

d) La cuota de interés del tercer semestre es la cuota de interés del primer semestre del año 2, y al ser el tipo de interés constante coincidirá con la cuota del segundo semestre de dicho año: $I_{2,1} = I_{2,2} = C_1 \times i^{(m)}$. Para hallar dicha cuota necesitamos conocer el saldo al final del año 1, y como las cuotas de amortización son anuales, podemos obtener C_1 a través de la siguiente expresión: $C_1 = C_0 - A_1 = 40.000 - 9.413{,}99 = 30.586{,}01$. Por consiguiente, $I_{2,1} = I_{2,2} = 30.586{,}01 \times 0{,}02 = 611{,}72$ €.

e) Dado que el saldo en la operación de préstamo con intereses fraccionados y en su préstamo equivalente coinciden, para hallar el capital vivo al final del año 2 lo haremos a través del préstamo francés equivalente: $C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$. Para ello previamente debemos calcular la cuantía del término amortizativo del préstamo equivalente francés: $C_0 = a \times a_{\overline{n}|i} \Rightarrow 40.000 = a \times a_{\overline{4}|0{,}0404} \Rightarrow a = 11.029{,}99$, por lo cual: $C_2 = 11.029{,}99 \times a_{\overline{4-2}|0{,}0404} = 20.791{,}69$ €.

f) El capital amortizado hasta el año 3 en la operación de préstamo dada coincide con la de su préstamo equivalente francés: $M_3^e = A_1 \times s_{\overline{3}|0{,}0404} = 9.413{,}99 \times s_{\overline{3}|0{,}0404} = 29.398{,}31$ €.

---

b) Préstamo con intereses fraccionados y cuotas de amortización constantes

En una operación de préstamo amortizable con intereses fraccionados y cuotas de capital constantes $A_s = A$; $\forall s = 1,2, \ldots, n$, el valor de las cuotas de amortización lo podemos calcular a través de la expresión: $C_0 = M_n^e = \sum_{h=1}^{n} A = n \times A \Rightarrow$ $\Rightarrow A = \dfrac{C_0}{n}$. Por tanto, para hallar el capital vivo C_s y el capital amortizado hasta un determinado punto del tiempo M_s^e podemos aplicar las expresiones ya deducidas para el método de amortización con cuotas de amortización constantes: $C_s = (n - s) \times A$ y $M_s^e = s \times A$, respectivamente.

La representación gráfica de esta operación es:

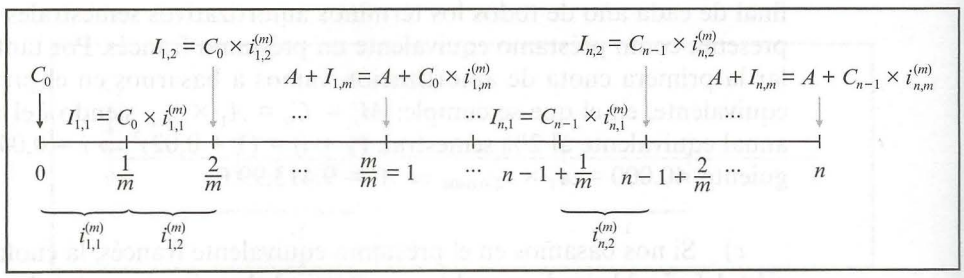


Figura 12.12.

© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.6

Sea un préstamo de 36.000 € a amortizar en 3 años, con pago de intereses trimestrales al 6% nominal anual y cuotas de amortización anuales constantes. Calcular: *a*) la cuantía de las cuotas de amortización anuales; *b*) la cuantía del cuarto término amortizativo; *c*) la cuota de interés del sexto trimestre; *d*) el saldo al final del año 2, y *e*) el capital total amortizado hasta el noveno trimestre.

Resolución

a) Al ser las cuotas de capital anuales constantes, su valor se obtiene al dividir la cuantía del préstamo entre el número de años que dura la operación: $C_0 = n \times A \Rightarrow 36.000 = 3 \times A \Rightarrow A = 12.000$ €.

b) El cuarto término amortizativo se abona al final del primer año, siendo, por tanto, igual a la cuota de interés del cuarto trimestre más la cuota de amortización anual: $a_{1,4} = I_{1,4} + A = C_0 \times i^{(m)}_{1,4} + A = C_0 \times i^{(m)} + A$. Para este cálculo tenemos que hallar el tipo de interés trimestral, el cual lo obtendremos a partir del tanto nominal anual dado: $i^{(m)} = \frac{0,06}{4} = 0,015$. El importe del término amortizativo del cuarto trimestre del año 1 es: $a_{1,4} = 36.000 \times 0,015 + 12.000 = 12.540$ €.

c) La cuota de interés del sexto trimestre es la cuota de interés del segundo trimestre del año 2: $I_{2,2}$. Además, dado que en esta operación las cuotas de amortización son anuales y el tipo de interés es constante, todas las cuotas de interés trimestrales de un mismo año serán de igual cuantía: $I_{2,1} = I_{2,2} = I_{2,3} = I_{2,4} = C_1 \times i^{(m)}$. Por tanto, para dicho cálculo previamente debemos hallar el capital vivo al final del año 1: $C_1 = 2 \times A = 2 \times 12.000 = 24.000$ €. Por tanto, $I_{2,2} = 24.000 \times 0,015 = 360$ €.

d) El préstamo termina de amortizarse en el año 3, por lo que el capital vivo al principio del mismo, o al final del año 2, coincide con la cuota de amortización del último año: $C_2 = A = 12.000$ €.

e) Al ser las cuotas de amortización anuales, el capital total amortizado hasta el noveno trimestre (primer trimestre del año 3) coincide con el capital total amortizado hasta el final del año 2, el cual permanece constante hasta el tercer trimestre del año 3: $M^e_{3,1} = M^e_2 = 2 \times A = 2 \times 12.000 = 24.000$ €.

© Ediciones Pirámide

12.5. AMORTIZACIÓN CON PERÍODOS DE CARENCIA Y DE DIFERIMIENTO

12.5.1. Préstamo con períodos de carencia

Un préstamo con períodos de carencia es una operación financiera de amortización en la que el prestatario sólo satisface en dichos períodos las cuotas de interés, no abonando cuota de capital o de amortización alguna. De este modo, en los períodos de carencia, los términos amortizativos son de igual cuantía que las cuotas de interés correspondientes: $a_s = I_s$. Por tanto, como en los períodos de carencia el prestatario siempre abona los intereses que se van generando en la operación, el saldo o capital vivo del préstamo permanece constante. Por consiguiente, para un período s de carencia se verifica:

$$C_s = C_{s-1}(1 + i_s) - a_s = C_{s-1}(1 + i_s) - I_s = C_{s-1}(1 + i_s) - C_{s-1} \times i_s = C_{s-1}$$

En el resto de los períodos de la operación, el préstamo se amortizará con términos que incluyen cuotas de amortización.

Si suponemos que los s primeros períodos de un préstamo son de carencia, la representación gráfica de esta operación es la siguiente:

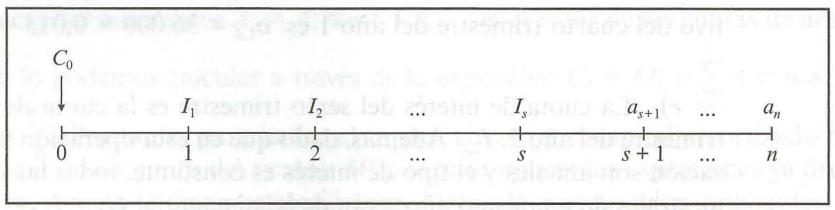


Figura 12.13.

En el caso que la operación financiera se pacte a un tipo de interés constante e igual a i, la ecuación de equivalencia financiera en el origen verifica:

$$C_0 = C_0 \times i \times a_{\overline{s}|i} + \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 + i)^{-(s+h)}$$

Y el saldo al final de período s, coincidente con el capital inicial, verifica:

$$C_s = C_0 = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 + i)^{-h}$$

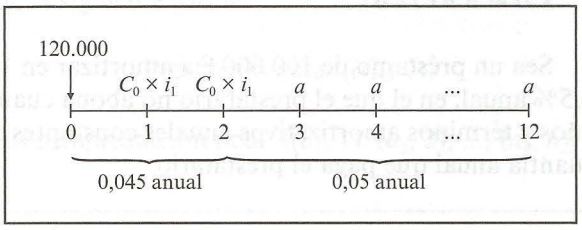
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.7

Sea un préstamo de 120.000 € a amortizar en 12 años, a un tipo de interés del 4,5% anual para los dos primeros años y del 5% anual para el resto del período, a amortizar con los dos primeros años de carencia, y después a través de pagos anuales constantes. Calcular la cuantía anual de los términos amortizativos que ha de abonar el prestatario.

Resolución

El importe del término amortizativo de los dos primeros años será igual a la cuota de interés, dado que al ser los dos primeros años de carencia el prestatario no devolverá capital, pagando sólo los intereses correspondientes. Además, como el tipo de interés para los dos primeros años es constante, la cuota de interés también lo es, y, por tanto, el término amortizativo de tales períodos también será constante, verificándose: $a_1 = a_2 = C_0 \times i_1 = 120.000 \times 0{,}045 = 5.400$ €. Gráficamente:



Para calcular el importe de los restantes términos amortizativos, planteamos la ecuación del saldo al final del año 2: $C_2 = C_0 = 120.000 = a \times a_{\overline{12-2}|0,05} \Rightarrow a =$ $= 15.540{,}55$ €.

12.5.2. Préstamo con períodos de diferimiento

Un préstamo con períodos de diferimiento es una operación financiera de amortización en la que el prestatario no abona cuantía alguna durante dichos períodos. Por tanto, durante tales períodos la cuantía del término amortizativo es nula, lo que implica que el capital vivo aumenta en la cuantía de los intereses que no se van satisfaciendo. Así, el capital vivo al final de un período de diferimiento s es: $C_s = C_{s-1}(1 + i_s)$.

Si suponemos que los s primeros períodos de un préstamo son de diferimiento, la representación gráfica de esta operación es la siguiente:

© Ediciones Pirámide

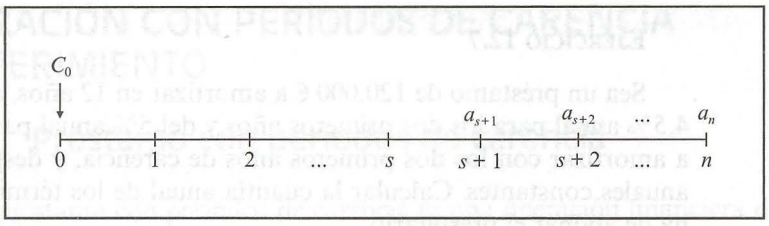


Figura 12.14.

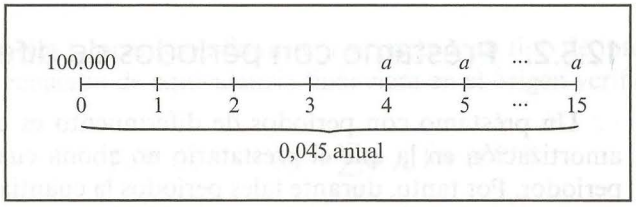
Si el préstamo se pacta a un tipo de interés constante i, la ecuación de equivalencia financiera en el origen es: $C_0 = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1+i)^{-(s+h)}$. En este caso, el capital vivo al final del último período de diferimiento verifica: $C_s = C_0(1+i)^s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1+i)^{-h}$.

EJERCICIO 12.8

Sea un préstamo de 100.000 € a amortizar en 15 años, a un tipo de interés del 4,5% anual, en el que el prestatario no abona cuantía alguna en los tres primeros años y términos amortizativos anuales constantes el resto de los años. Calcular la cuantía anual que paga el prestatario.

Resolución

El importe del término amortizativo lo podemos hallar planteando la expresión de cálculo del saldo al final del año 3 (último año de diferimiento): $C_3 = a \times a_{\overline{15-3}|0,045}$. Gráficamente:



El saldo en 3 verifica: $C_3 = 100.000(1 + 0,045)^3 = 114.116,61$. Por tanto: $114.116,61 = a \times a_{\overline{15-3}|0,045} \Rightarrow a = 12.514,73$ €.

© Ediciones Pirámide

12.6. AMORTIZACIÓN CON INTERESES ANTICIPADOS

12.6.1. Planteamiento general

Un préstamo con contraprestación múltiple y con intereses anticipados o prepagables es una operación financiera en la que las cuotas de interés se pagan al principio de cada período, es decir, de forma anticipada.

La cuantía neta, C_0, que el prestatario percibe al principio de la operación es la resultante de detraer al importe nominal del préstamo, C_0^*, la cuota de interés anticipada correspondiente al primer período, I_1^*, esto es: $C_0 = C_0^* - I_1^* = C_0^* - C_0^* \times i_1^* = C_0^*(1 - i_1^*)$, siendo i_1^* el tipo de interés anticipado unitario correspondiente al período 1.

En este tipo de préstamos el término amortizativo, a_s, de cada período s, está compuesto por la cuota de amortización nominal de dicho período, A_s^*, cuya misión es ir devolviendo el principal del préstamo C_0^*, y la cuota de interés, I_{s+1}^*, correspondiente al período siguiente: $a_s = A_s^* + I_{s+1}^*$.

La operación descrita con tipos de interés unitarios prepagables variables, i_s^*, queda definida de la siguiente forma:

Prestación neta: $\{(C_0, 0)\}$

Contraprestación neta: $\{(a_1, 1); (a_2, 2); ...; (a_n, n)\}$

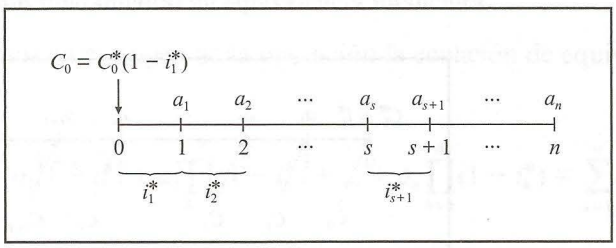


Figura 12.15.

Teniendo en cuenta que la cuota de amortización nominal de un determinado período s recoge la variación del capital nominal vivo en dicho período: $A_s^* = C_{s-1}^* - C_s^*$, y que la cuota de interés prepagable que se abona al principio del período $s + 1$ se obtiene al multiplicar el capital nominal vivo en dicho momento, C_s^*, por el tipo unitario de interés anticipado del período $s + 1$, $I_{s+1}^* = C_s^* \times i_{s+1}^*$, el término amortizativo de un período s cualquiera, a_s, se puede expresar en función de cada uno de sus componentes como: $a_s = A_s^* + I_{s+1}^* = C_{s-1}^* - C_s^* + C_s^* \times i_{s+1}^* = C_{s-1}^* - C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$.

© Ediciones Pirámide

En el último período se verifica $a_n = A_n^* = C_{n-1}^*$, pues los intereses del período $s + 1$ son nulos: $I_{n+1}^* = 0$.

En este tipo de préstamos, al abonarse los intereses de forma anticipada, el saldo nominal en un determinado período s, C_s^*, es lo que realmente se debe a la izquierda de $s + 1$, es decir, constituye al saldo o reserva matemática al final del período siguiente antes de abonarse la cuantía de a_{s+1}: $R_{s+1}^- = C_s^*$. Gráficamente:

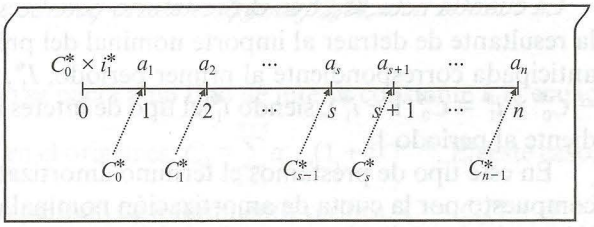


Figura 12.16.

Por otro lado, lo que realmente se debe al final del período s se denomina saldo neto, C_s, que es la diferencia entre el saldo nominal y los intereses ya abonados del período siguiente: $C_s = C_s^* - i_{s+1}^* \times C_s^* = C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$. Dicho saldo neto es la reserva matemática calculada a la derecha de dicho punto s: $R_s^+ = C_s$, es decir, el capital adeudado en s una vez abonado el término amortizativo de dicho período. Gráficamente:

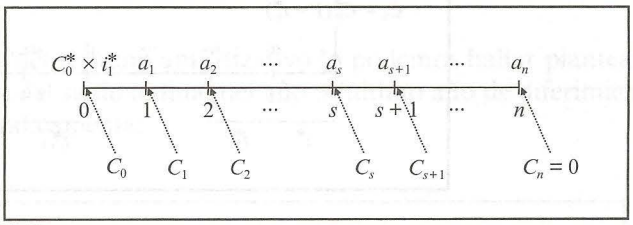


Figura 12.17.

Asimismo, a la diferencia entre los saldos netos al principio y al final de un determinado período se le denomina cuota de amortización neta: $A_s = C_{s-1} - C_s$.

Por otra parte, si en la expresión del término amortizativo, $a_s = C_{s-1}^* - C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$, expresamos los saldos nominales en función de los saldos netos, se verifica: $a_s = C_{s-1}(1 - i_s^*)^{-1} - C_s$. Además, si tenemos en cuenta la relación de equivalencia entre el tipo de interés prepagable y el pospagable, $(1 - i_s^*)(1 + i_s) = 1$, llegamos a la siguiente expresión: $a_s = C_{s-1}(1 + i_s) - C_s$.

© Ediciones Pirámide

Si despejamos de la ecuación anterior el saldo neto, obtenemos la ecuación dinámica del capital vivo en un préstamo amortizable con intereses pospagables equivalente al préstamo dado: $C_s = C_{s-1}(1 - i_s) - a_s$.

En consecuencia, con los tipos de interés pospagables equivalentes a los tipos anticipados pactados, a las cuantías netas les son de aplicación todas las expresiones de los préstamos valorados con intereses pospagables. El gráfico del **préstamo equivalente** amortizable con intereses pospagables es el siguiente:

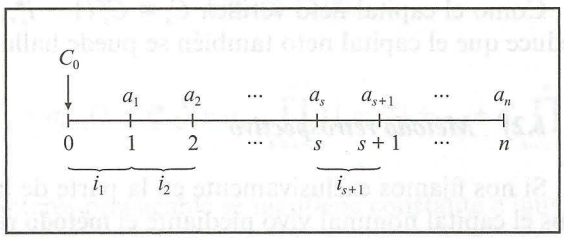


Figura 12.18.

A continuación analizamos, en función de los tipos de interés prepagables, la ecuación de equivalencia financiera, el capital nominal vivo, el capital total amortizado y el cuadro de amortización.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

Si planteamos en el origen de la operación la ecuación de equivalencia financiera, tenemos:

$$C_0^*(1 - i_1^*) = a_1(1 - i_1^*) + a_2\prod_{h=1}^{2}(1 - i_h^*) + ... + a_n\prod_{h=1}^{n}(1 - i_h^*) = \sum_{s=1}^{n} a_s \prod_{h=1}^{s}(1 - i_h^*)$$

Si valoramos la operación a un tipo de interés prepagable constante e igual a i^*, la ecuación de equivalencia financiera en el origen es la siguiente:

$$C_0^*(1 - i^*) = a_1(1 - i^*) + a_2(1 - i^*)^2 + ... + a_n(1 - i^*)^n \quad \Rightarrow \quad C_0 = \sum_{h=1}^{n} a_h(1 - i^*)^h$$

b) Capital nominal vivo o saldo financiero nominal

Para determinar C_s^*, capital nominal vivo en un determinado período s, hay que tener en cuenta que éste hace referencia al saldo financiero a la izquierda del extremo superior del intervalo temporal correspondiente al período siguiente, es

© Ediciones Pirámide

decir, a la reserva matemática calculada a la izquierda del punto $s + 1$. Dicho saldo se puede hallar a través de los distintos métodos estudiados: recurrente, retrospectivo y prospectivo.

b.1) Método recurrente

Teniendo en cuenta la expresión ya deducida $a_s = C^*_{s-1} - C^*_s(1 - i^*_{s+1})$, al realizar operaciones se llega a: $C^*_s = (C^*_{s-1} - a_s)(1 - i^*_{s+1})^{-1}$.

Como el capital neto verifica $C_s = C^*_s(1 - i^*_{s+1})$, de la ecuación precedente se deduce que el capital neto también se puede hallar como: $C_s = C^*_{s-1} - a_s$.

b.2) Método retrospectivo

Si nos fijamos exclusivamente en la parte de la operación vencida, calcularemos el capital nominal vivo mediante el **método retrospectivo:**

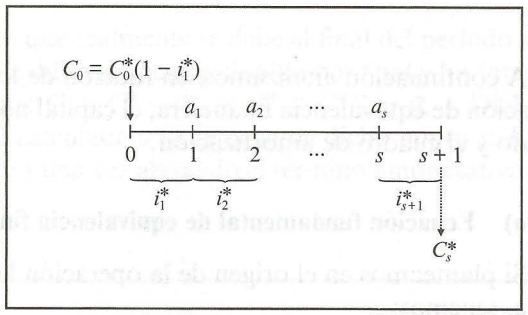


Figura 12.19.

$$C^*_s = C^*_0(1 - i^*_1)\prod_{h=1}^{s+1}(1 - i^*_h)^{-1} - a_1\prod_{h=2}^{s+1}(1 - i^*_h)^{-1} - a_2\prod_{h=3}^{s+1}(1 - i^*_h)^{-1} - \ldots - a_s(1 - i^*_{s+1})^{-1}$$

Si el tipo de interés anticipado permanece constante e igual a i^*:

$$C^*_s = C^*_0(1 - i^*)(1 - i^*)^{-(s+1)} - a_1(1 - i^*)^{-s} - a_2(1 - i^*)^{-(s-1)} - \ldots - a_s(1 - i^*)^{-1}$$

b.3) Método prospectivo

Si nos centramos en la parte pendiente de vencer de la operación, hallaremos el capital nominal vivo por el **método prospectivo:**

© Ediciones Pirámide

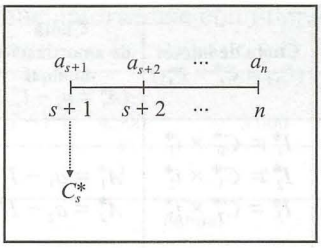


Figura 12.20.

$$C_s^* = a_{s+1} + a_{s+2}(1 - i_{s+2}^*) + a_{s+3}\prod_{h=s+2}^{s+3}(1 - i_h^*) + ... + a_n\prod_{h=s+2}^{n}(1 - i_h^*)$$

Si el tipo de interés prepagable se mantiene constante e igual a i^* para todos los períodos:

$$C_s^* = a_{s+1} + a_{s+2}(1 - i^*) + a_{s+3}(1 - i^*)^2 + ... + a_n(1 - i^*)^{n-(s+1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}(1 - i^*)^{(h-1)}$$

c) Capital nominal total amortizado

El capital nominal total amortizado en los s primeros períodos M_s^{e*} lo podemos hallar bien como la suma de las cuotas de amortización nominales vencidas o bien como diferencia entre la cuantía nominal del préstamo y el capital nominal vivo después de s períodos: $M_s^{e*} = \sum_{h=1}^{s} A_h^* = C_0^* - C_s^*$

Despejando de la expresión anterior C_s^*, hallamos el capital nominal vivo a partir del capital nominal amortizado: $C_s^* = C_0^* - M_s^{e*} = \sum_{h=1}^{n} A_h^* - \sum_{h=1}^{s} A_h^* = \sum_{h=s+1}^{n} A_h^*$, así como a través de la suma aritmética de las cuotas de capital nominales pendientes de vencimiento.

d) Cuadro de amortización

El cuadro de amortización recoge para cada período de la operación de préstamo el valor de las siguientes magnitudes: tipo de interés anticipado, término amortizativo, cuota de interés, cuota de amortización nominal, capital nominal total amortizado y capital nominal vivo.

© Ediciones Pirámide

Per.	Tipo de interés anticipado i_{s+1}^*	Término amortizativo $(a_s = A_s^* + I_{s+1}^*)$	Cuota de interés $(I_{s+1}^* = C_s^* \times i_{s+1}^*)$	Cuota de amortización nominal $(A_s^* = a_s - I_{s+1}^*)$	Capital nominal total amortizado $(M_s^{e*} = M_{s-1}^{e*} + A_s^*)$	Capital nominal vivo $(C_s^* = C_{s-1}^* - A_s^*)$
0	i_1^*	$a_0 = C_0^* \times i_1^*$	$I_1^* = C_0^* \times i_1^*$	—	—	C_0^*
1	i_2^*	a_1	$I_2^* = C_1^* \times i_2^*$	$A_1^* = a_1 - I_2^*$	$M_1^{e*} = A_1^*$	$C_1^* = C_0^* - A_1^*$
2	i_3^*	a_2	$I_3^* = C_2^* \times i_3^*$	$A_2^* = a_2 - I_3^*$	$M_2^{e*} = M_1^{e*} + A_2^*$	$C_2^* = C_1^* - A_2^*$
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
$n-1$	i_n^*	a_{n-1}	$I_n^* = C_{n-1}^* \times i_n^*$	$A_{n-1}^* = a_{n-1} - I_n^*$	$M_{n-1}^{e*} = M_{n-2}^{e*} + A_{n-1}^*$	$C_{n-1}^* = C_{n-2}^* - A_{n-1}^* = A_n^*$
n	—	a_n	—	$A_n^* = a_n$	$M_n^{e*} = M_{n-1}^{e*} + A_n^* = C_0^*$	$C_n^* = C_{n-1}^* - A_n^* = 0$

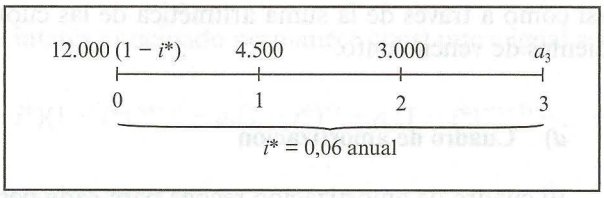
EJERCICIO 12.9

Sea un préstamo de 12.000 € a amortizar en 3 años, a un tipo de interés anticipado del 6% anual. Si se sabe que los términos amortizativos son anuales y que las cuantías de los términos amortizativos de los años 1 y 2 son 4.500 € y 3.000 €, respectivamente, determinar: *a*) la cuantía del tercer término amortizativo; *b*) el capital nominal vivo después de un año; *c*) el capital nominal vivo después de dos años; *d*) el saldo neto al final del año 2; *e*) el capital nominal amortizado en los dos primeros años; *f*) la cuota de amortización nominal del año 1, y *g*) el cuadro de amortización.

Resolución

a) La cuantía del tercer término amortizativo, a_3, la podemos obtener a través de la ecuación de equivalencia financiera de la operación de préstamo con intereses prepagables o bien a través de la ecuación de equivalencia financiera de su préstamo equivalente con intereses pospagables.

a.1) Préstamo amortizable con intereses anticipados:

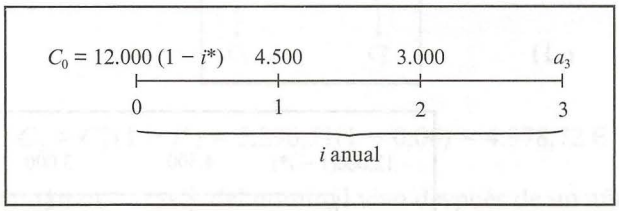


$$12.000(1 - 0{,}06) = 4.500(1 - 0{,}06) + 3.000(1 - 0{,}06)^2 + a_3(1 - 0{,}06)^3 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_3 = 5.296{,}51 \text{ €}$$

© Ediciones Pirámide

a.2) Préstamo equivalente amortizable con intereses pospagables:

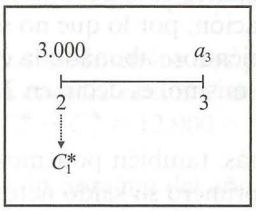


$$C_0 = 4.500(1 + i)^{-1} + 3.000(1 + i)^{-2} + a_3(1 + i)^{-3}$$

Para hallar a_3 necesitamos hallar el tipo de interés anual pospagable equivalente al prepagable dado: $(1 - 0{,}06)(1 + i) = 1 \Rightarrow i = 0{,}063829787$, y la cuantía neta del préstamo: $C_0 = C_0^* - I_1^* = C_0^*(1 - i^*) = 12.000(1 - 0{,}06) = 11.280$. Sustituyendo ambos datos en la ecuación de equivalencia financiera, obtenemos $a_3 = 5.296{,}51$ €.

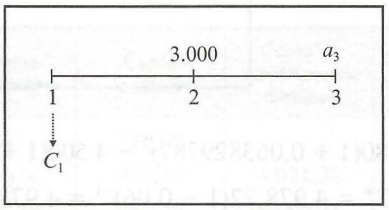
b) El capital nominal vivo después del primer año es el saldo financiero a la izquierda del punto 2, y a través del método prospectivo verifica:

b.1) Si lo determinamos a través del préstamo con intereses prepagables:



$$C_1^* = 3.000 + 5.296{,}51(1 - 0{,}06) = 7.978{,}72\ €$$

b.2) Si lo calculamos con el préstamo equivalente con intereses pospagables, tenemos: $C_s = C_s^*(1 - i_{s+1}^*)$, o, lo que es lo mismo, $C_s = C_s^*(1 + i_{s+1})^{-1}$.

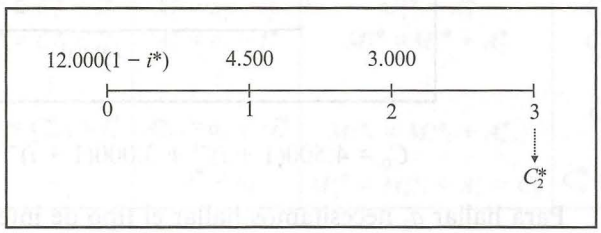


$$C_1 = 3.000(1 + 0{,}063829787)^{-1} + 5.296{,}51(1 + 0{,}063829787)^{-2} = 7.500 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow C_1^* = 7.500(1 - 0{,}06)^{-1} = 7.500(1 + 0{,}063829787) = 7.978{,}72\ €$$

© Ediciones Pirámide

c) El capital nominal vivo después de dos años es el saldo financiero a la izquierda del punto 3. A través del método retrospectivo se verifica:

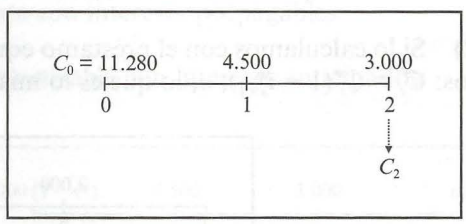
c.1)



$$C_2^* = 12.000(1 - 0{,}06)(1 - 0{,}06)^{-3} - 4.500(1 - 0{,}06)^{-2} - \\ - 3.000(1 - 0{,}06)^{-1} = 5.296{,}51\ €$$

Tal y como se ha expuesto, el importe del capital pendiente de vencer a la izquierda del punto 3 coincide con la cuantía del último término amortizativo, dado que se trata de un préstamo con pago prepagable de intereses. Por tanto, el último término amortizativo es igual a la última cuota de capital nominal, ya que en 3 finaliza la operación, por lo que no se devenga cuota de interés alguna al ser ésta prepagable, habiéndose abonado la cuota de interés correspondiente a dicho año al principio del mismo, es decir, en 2.

c.2) Además, también podemos hallarlo a través del préstamo equivalente, determinando primero su saldo neto en 2, para posteriormente calcular el citado nominal:

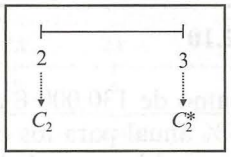


$$C_2 = 11.280(1 + 0{,}063829787)^2 - 4.500(1 + 0{,}063829787) - 3.000 = 4.978{,}72\ € \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_2^* = 4.978{,}72(1 - 0{,}06)^{-1} = 4.978{,}72(1 + 0{,}063829787) = 5.296{,}51\ €$$

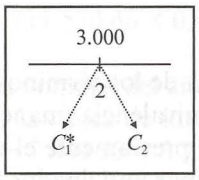
d) El saldo neto al final del año 2 se puede hallar de diversas formas. Calculado a través del nominal vivo después de dos años, tenemos:

© Ediciones Pirámide



$$C_2 = C_2^*(1 - i^*) = 5.296{,}51(1 - 0{,}06) = 4.978{,}72\ €$$

Si lo determinamos a través del nominal vivo después de un año, es decir, calculando la reserva a la derecha del punto 2 a partir del saldo a la izquierda de dicho punto, se verifica:



$$C_2 = C_1^* - a_2 = 7.978{,}72 - 3.000 = 4.978{,}72\ €$$

También se puede obtener a través del préstamo equivalente con intereses pospagables, tal y como se ha efectuado en el apartado *c*.2) de este ejercicio.

e) El capital nominal amortizado en los dos primeros años lo podemos obtener como diferencia entre la cuantía nominal del préstamo y el nominal vivo después de dos años: $M_2^{e*} = C_0^* - C_2^* = 12.000 - 5.296{,}51 = 6.703{,}49$ €.

f) La cuota de amortización nominal del año 1 la hallamos detrayendo del primer término amortizativo la cuota de interés prepagable que corresponde al siguiente año: $A_1^* = a_1 - I_2^* = a_1 - C_1^* \times i^* = 4.500 - 7.978{,}72 \times 0{,}06 = 4.021{,}28$ €.

g) El valor de cada uno de los componentes del cuadro de amortización del préstamo con intereses anticipados lo obtendremos aplicando las ecuaciones anteriormente citadas.

Año	Tipo de interés anticipado	Término amortizativo	Cuota de interés	Cuota de amortización nominal	Capital nominal total amortizado	Capital nominal vivo
0	0,06	—	720,00	—	—	12.000,00
1	0,06	4.500,00	478,72	4.021,28	4.021,28	7.978,72
2	0,06	3.000,00	317,79	2.682,21	6.703,49	5.296,51
3	—	5.296,51	—	5.296,51	12.000,00	0,00

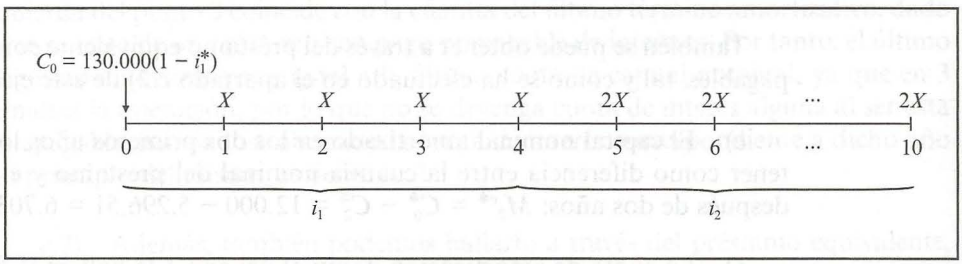
© Ediciones Pirámide

EJERCICIO 12.10

Sea un préstamo de 130.000 € a amortizar en 10 años, a un tipo de interés anticipado del 5% anual para los cuatro primeros años y del 7% anual para el resto. Si se sabe que el importe de los términos amortizativos anuales es X para los cuatro primeros años y $2X$ para los años restantes, hallar: *a*) el importe de los términos amortizativos; *b*) la quinta cuota de interés; *c*) la cuota de amortización nominal del año 4; *d*) el saldo neto al final del año 7, y *e*) el capital nominal vivo después de nueve años.

Resolución

a) La cuantía de los términos amortizativos la podemos obtener a través de la ecuación de equivalencia financiera del préstamo equivalente, para lo cual tenemos que hallar previamente el tipo de interés anual pospagable equivalente a cada uno de los tipos anticipados dados.



$$(1 - 0{,}05)(1 + i_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = 0{,}052631578$$

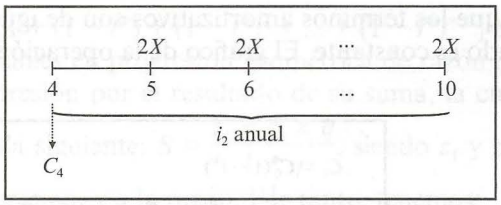
$$(1 - 0{,}07)(1 + i_2) = 1 \quad \Rightarrow \quad i_2 = 0{,}075268817$$

Si planteamos la ecuación de equivalencia financiera en el origen, se verifica:

$$130.000(1 - 0{,}05) = X \times a_{\overline{4}|i_1} + 2X \times a_{\overline{10-4}|i_2}(1 + i_1)^{-4} \quad \Rightarrow \quad X = 11.061{,}92 \text{ €}$$

b) La quinta cuota de interés, o interés anticipado del año 5, la obtenemos al multiplicar el nominal vivo en 4 por el tipo de interés correspondiente al año 5: $I_5^* = C_4^* \times i_2^*$. Para calcular el capital nominal vivo en 4 hemos de tener en cuenta la relación entre el capital nominal vivo y el saldo neto: $C_4 = C_4^*(1 - i_2^*)$. A su vez, el saldo neto lo obtenemos a través del método prospectivo en el préstamo equivalente:

© Ediciones Pirámide



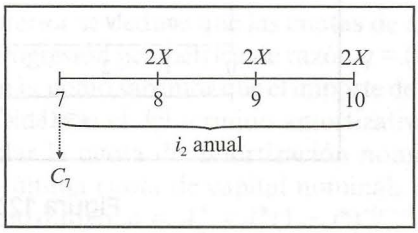
$$C_4 = 22.123{,}84 \times a_{\overline{10-4}|i_2} = 103.760{,}53$$

$$C_4 = C_4^*(1 - i_2^*) \Rightarrow C_4^* = 103.760{,}53(1 - 0{,}07)^{-1} = 111.570{,}46$$

$$I_5^* = C_4^* \times i_2^* = 111.570{,}46 \times 0{,}07 = 7.809{,}93 \text{ €}$$

c) La cuota de amortización nominal del año 4 podemos hallarla detrayendo del cuarto término amortizativo la cuota de interés prepagable del año 5: $A_4^* = a_4 - I_5^* = X - I_5^* = 11.061{,}92 - 7.809{,}93 = 3.251{,}99$ €.

d) El saldo neto al final del año 7 podemos calcularlo a través del préstamo equivalente. Utilizando el método prospectivo, se verifica: $C_7 = 22.123{,}84 \times a_{\overline{10-7}|i_2} = 57.505{,}55$ €.



e) El capital nominal vivo después de nueve años es el saldo financiero calculado a la izquierda de 10, es decir, del último año. Por tanto, debe coincidir con la última cuota de amortización nominal y con el último término amortizativo: $C_9^* = A_{10}^* = a_{10} = 2X = 22.123{,}84$ €.

12.6.2. Método alemán

Al igual que en los préstamos con intereses pospagables, en los préstamos con pago prepagable de intereses se pueden distinguir distintos métodos de amortización en función de las hipótesis que se realicen sobre los términos amortizativos o sus componentes. No obstante, entre los diversos métodos destaca el alemán,

© Ediciones Pirámide

en el que los términos amortizativos son de igual cuantía y el tipo de interés anticipado es constante. El gráfico de la operación es:

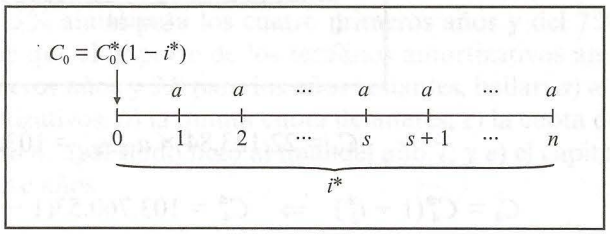


Figura 12.21.

Si en este tipo de préstamo hallamos el tipo de interés pospagable equivalente al tipo prepagable dado, y planteamos el préstamo equivalente amortizable con intereses pospagables, tenemos que a las cuantías netas les son de aplicación todas las expresiones obtenidas para un préstamo amortizable por el método francés:

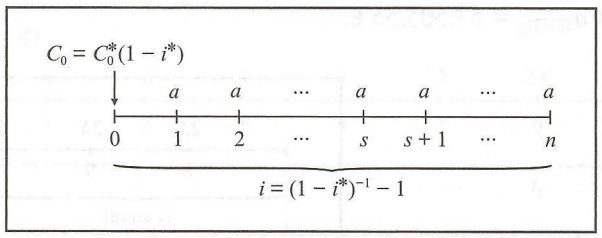


Figura 12.22.

Al igual que en los epígrafes anteriores, vamos a plantear en este método, en función del tipo de interés anticipado, la ecuación de equivalencia financiera, la ley de variación de las cuotas de amortización nominales, el cálculo del capital nominal vivo y el del capital nominal total amortizado.

a) Ecuación fundamental de equivalencia financiera

En este caso, la ecuación de equivalencia financiera de la operación de préstamo es la siguiente:

$$C_0^*(1 - i^*) = a(1 - i^*) + a(1 - i^*)^2 + a(1 - i^*)^3 + ... + a(1 - i^*)^n$$

$$C_0^*(1 - i^*) = a(1 - i^*)[1 + (1 - i^*) + (1 - i^*)^2 + ... + (1 - i^*)^{n-1}]$$

© Ediciones Pirámide

Sabiendo que $[1 + (1 - i^*) + (1 - i^*)^2 + ... + (1 - i^*)^{n-1}]$ es la suma aritmética de n términos variables en progresión geométrica de razón $q = 1 - i^*$, podemos sustituir dicha expresión por el resultado de su suma, la cual se puede hallar a través de la fórmula siguiente: $S = \frac{z_1 - z_n \times q}{1 - q}$, siendo z_1 y z_n el primer y último término de la progresión, y q la razón. Por tanto, tenemos:

$$C_0^*(1 - i^*) = a(1 - i^*)\frac{1 - (1 - i^*)^{n-1}(1 - i^*)}{1 - (1 - i^*)} \Rightarrow C_0^* = a\frac{1 - (1 - i^*)^n}{i^*}$$

b) Ley de variación de las cuotas de amortización nominales

Para obtener la ley de variación de las cuotas de amortización nominales expresamos el capital nominal vivo en dos períodos consecutivos a través del método recurrente, y calculamos la diferencia de ambas expresiones:

$$C_s^* = (C_{s-1}^* - a)(1 - i^*)^{-1}$$

$$C_{s+1}^* = (C_s^* - a)(1 - i^*)^{-1}$$

$$\underbrace{C_s^* - C_{s+1}^*}_{A_{s+1}^*} = \underbrace{C_{s-1}^* - C_s^*}_{A_s^*}(1 - i^*)^{-1} \Rightarrow A_{s+1}^* = A_s^*(1 - i^*)^{-1}$$

De la expresión anterior se deduce que las cuotas de amortización en el método alemán varían en progresión geométrica de razón $q = (1 - i^*)^{-1}$, por lo que $A_s^* = A_1^*(1 - i^*)^{-(s-1)}$. Además, como sabemos que el importe de la última cuota de amortización nominal coincide con el del término amortizativo ($a = a_n = A_n^* = C_{n-1}^*$), también podemos hallar la cuota de amortización nominal de un determinado período a través de la última cuota de capital nominal, o, lo que es lo mismo, a partir del término amortizativo: $a = A_n^* = A_s^*(1 - i^*)^{-(n-s)} \Rightarrow A_s^* = A_n^*(1 - i^*)^{n-s} = a(1 - i^*)^{n-s}$.

c) Capital nominal vivo o saldo financiero nominal

c.1) *Método retrospectivo*

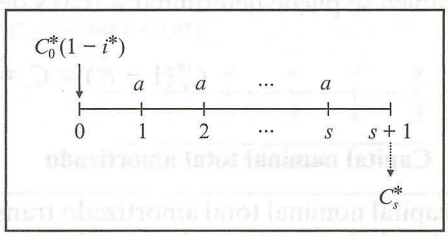


Figura 12.23.

© Ediciones Pirámide

$$C_s^* = C_0^*(1 - i^*)(1 - i^*)^{-(s+1)} - [a(1 - i^*)^{-s} + a(1 - i^*)^{-(s-1)} + ... + a(1 - i^*)^{-1}] =$$

$$= C_0^*(1 - i^*)^{-s} - a(1 - i^*)^{-1}[(1 - i^*)^{-(s-1)} + ... + (1 - i^*)^{-2} + (1 - i^*)^{-1} + 1] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = C_0^*(1 - i^*)^{-s} - a(1 - i^*)^{-1}\frac{(1 - i^*)^{-(s-1)} - 1(1 - i^*)^{-1}}{1 - (1 - i^*)^{-1}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = C_0^*(1 - i^*)^{-s} - a\frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*}$$

Además, en el préstamo equivalente con intereses pospagables y por el método francés, se verifica:

$$C_s^*(1 - i^*) = C_s = C_0(1 + i)^s - a \times s_{\overline{s}|i}$$

c.2) Método prospectivo

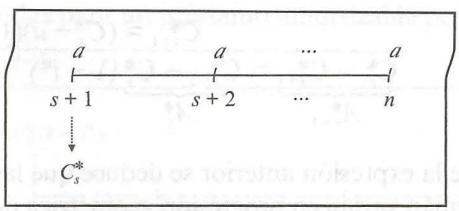


Figura 12.24.

$$C_s^* = a + a(1 - i^*) + a(1 - i^*)^2 + ... + a(1 - i^*)^{n-(s+1)} = a[1 + (1 - i^*) + (1 - i^*)^2 +$$

$$+ ... + (1 - i^*)^{n-(s+1)}] \Rightarrow \quad C_s^* = a\frac{1 - (1 - i^*)^{n-(s+1)}(1 - i^*)}{1 - (1 - i^*)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C_s^* = a\frac{1 - (1 - i^*)^{n-s}}{i^*}$$

También se puede determinar a través del préstamo francés equivalente:

$$C_s^*(1 - i^*) = C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$$

***d)* Capital nominal total amortizado**

El capital nominal total amortizado transcurridos s períodos, M_s^{e*}, es la suma aritmética de las s primeras cuotas de amortización nominales, y como dichas cuotas en el método alemán varían en progresión geométrica, tenemos:

© Ediciones Pirámide

$$M_s^{e*} = \sum_{h=1}^{s} A_h^* = A_1^* + A_1^*(1 - i^*)^{-1} + A_1^*(1 - i^*)^{-2} + \ldots + A_1^*(1 - i^*)^{-(s-1)} =$$

$$= A_1^*[1 + (1 - i^*)^{-1} + (1 - i^*)^{-2} + \ldots + (1 - i^*)^{-(s-1)}] =$$

$$= A_1^* \frac{1 - (1 - i^*)^{-(s-1)}(1 - i^*)^{-1}}{1 - (1 - i^*)^{-1}} \Rightarrow M_s^{e*} = A_1^*(1 - i^*)\frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*}$$

Además, si expresamos A_1^* en función de la última cuota o del término amortizativo: $A_1^* = A_n^*(1 - i^*)^{n-1} = a(1 - i^*)^{n-1}$, tenemos:

$$M_s^{e*} = a(1 - i^*)^{n-1}(1 - i^*)\frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*} = a(1 - i^*)^n \frac{(1 - i^*)^{-s} - 1}{i^*}$$

Por otra parte, también podemos hallar el total nominal amortizado después de s períodos a través de la diferencia entre el nominal del préstamo y el capital nominal vivo:

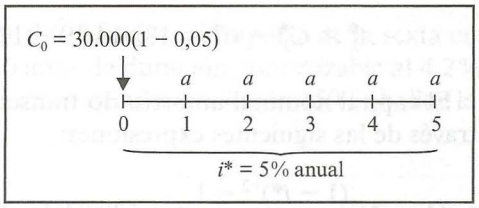
$$M_s^{e*} = C_0^* - C_s^* = C_0^*\left[1 - \frac{1 - (1 - i^*)^{n-s}}{1 - (1 - i^*)^n}\right]$$

EJERCICIO 12.11

Sea un préstamo de 30.000 € a amortizar en 5 años mediante términos amortizativos anuales constantes y pago anticipado de intereses al 5% anual. Calcular: *a*) la cuantía del término amortizativo; *b*) la cuota de amortización nominal del año 3; *c*) el capital nominal amortizado transcurridos dos años; *d*) el capital nominal vivo después de tres años a través del método retrospectivo, y *e*) el saldo en términos nominales después de dos años a través del método prospectivo.

Resolución

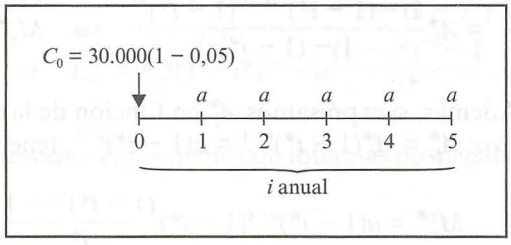
a)



$$30.000 = a\frac{1 - (1 - 0{,}05)^5}{0{,}05} \Rightarrow a = 6.630{,}74\ €$$

© Ediciones Pirámide

El término amortizativo también se puede obtener a través del préstamo equivalente, que es un préstamo francés, para lo cual previamente tenemos que hallar el tipo de interés anual pospagable equivalente al prepagable dado:



$$(1 - 0,05)(1 + i_1) = 1 \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{1}{0,95} - 1 = \frac{1}{19}$$

$$C_0^*(1 - i^*) = a \times a_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad 30.000(1 - 0,05) = a \times a_{\overline{5}|1/19} \quad \Rightarrow \quad a = 6.630,74 \text{ €}$$

b) La cuota de amortización nominal del año 3 la hallamos en función de la última cuota de amortización nominal, la cual a su vez es igual al último término amortizativo:

$$A_3^* = A_n^*(1 - i^*)^{n-3} = a(1 - i^*)^{n-3} = 6.630,74(1 - 0,05)^{5-3} = 5.984,24 \text{ €}$$

Podemos calcular dicha cuota de amortización mediante su préstamo equivalente, verificándose:

$$C_2 = a \times a_{\overline{n-2}|i} = 6.630,74 \times a_{\overline{3}|1/19} = 17.968,48 \quad \Rightarrow \quad C_2 = C_2^*(1 - i^*) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_2^* = 17.968,48(1 - 0,05)^{-1} = 18.914,19$$

$$C_3 = a \times a_{\overline{n-3}|i} = 6.630,74 \times a_{\overline{2}|1/19} = 12.283,45 \quad \Rightarrow \quad C_3 = C_3^*(1 - i^*) \quad \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \quad C_3^* = 12.283,45(1 - 0,05)^{-1} = 12.929,95$$

$$A_3^* = C_2^* - C_3^* = 18.914,19 - 12.929,95 = 5.984,24 \text{ €}$$

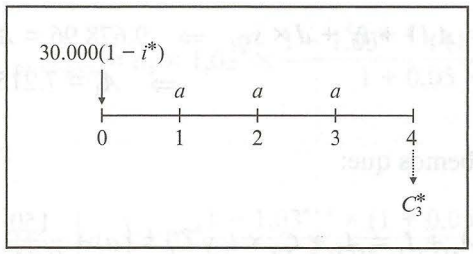
c) El capital nominal amortizado transcurridos dos años lo podemos obtener a través de las siguientes expresiones:

$$M_2^{e*} = a(1 - i^*)^5 \frac{(1 - i^*)^{-2} - 1}{i^*} = 6.630,74(1 - 0,05)^5 \frac{(1 - 0,05)^{-2} - 1}{0,05} = 11.085,81 \text{ €}$$

$$M_2^{e*} = A_1^* + A_2^* = 6.630,74(1 - 0,05)^{5-1} + 6.630,74(1 - 0,05)^{5-2} = 11.085,81 \text{ €}$$

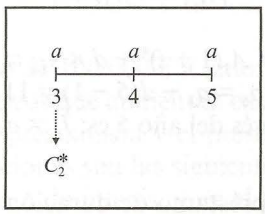
© Ediciones Pirámide

d) Para calcular el capital nominal vivo, transcurridos tres años a través del método retrospectivo hemos de plantear la diferencia entre la prestación vencida y la contraprestación vencida a la izquierda del punto 4 del préstamo alemán dado:



$$C_3^* = 30.000(1 - 0{,}05)^{-3} - 6.630{,}74\frac{(1 - 0{,}05)^{-3} - 1}{0{,}05} = 12.929{,}95\ €$$

e) Para calcular el capital nominal pendiente de amortizar después de dos años a través del método prospectivo, tenemos que calcular a la izquierda del punto 3 la suma financiera de los términos amortizativos pendientes de vencimiento:



$$C_2^* = 6.630{,}74\frac{1 - (1 - 0{,}05)^{5-2}}{0{,}05} = 18.914{,}19\ €$$

12.7. EJERCICIOS Y PROBLEMAS RESUELTOS

1. Si se sabe que 9.678,96 € es el importe de la sexta cuota de amortización de un préstamo de 10 años de duración, amortizable al 4,2% anual mediante pagos anuales que aumentan de año en año en 150 €, hallar la cuota de interés del quinto año.

Resolución

Se trata de un préstamo amortizable a través de términos amortizativos anuales que crecen en progresión aritmética de razón 150 € anuales. De este modo,

© Ediciones Pirámide

conocida la sexta cuota de amortización A_6, y teniendo en cuenta la expresión de la ley de variación de las cuotas de amortización en este método, podemos hallar la primera cuota de capital A_1:

$$A_6 = A_1(1+i)^5 + d \times s_{\overline{5}|i} \Rightarrow 9.678{,}96 = A_1(1+0{,}042)^5 + 150 \times s_{\overline{5}|0{,}042} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow A_1 = 7.215{,}31$$

Sabemos que:

$$a_1 = A_1 + I_1 = A_1 + C_0 \times i, \text{ y } C_0 = \left(a_1 + \frac{150}{0{,}042} + 150 \times 10\right) \times a_{\overline{10}|0{,}042} - \frac{150 \times 10}{0{,}042}$$

por lo que:

$$a_1 = 7.215{,}31 + \left[\left(a_1 + \frac{150}{0{,}042} + 150 \times 10\right) \times a_{\overline{10}|0{,}042} - \frac{150 \times 10}{0{,}042}\right] \times 0{,}042 \Rightarrow$$
$$\Rightarrow a_1 = 11.205{,}31$$

Siendo $A_5 = A_1(1+i)^4 + d \times s_{\overline{4}|i} = 7.215{,}31 \times 1{,}042^4 + 150 \times s_{\overline{4}|0{,}042} = 9.144{,}88$, y sabiendo que $a_5 = a_1 + d(5-1) = 11.205{,}31 + 150 \times 4 = 11.805{,}31$, se deduce que la cuota de interés del año 5 es: $I_5 = a_5 - A_5 = 11.805{,}31 - 9.144{,}88 = 2.660{,}43$ €.

2. En un préstamo de duración 6 años se sabe que el prestatario no abonó cuantía alguna en el primer año y que en el resto de los años paga semestralmente una cuantía igual a 4.570,35 €. Calcular la cuantía del préstamo, si el tipo de interés pactado es el 5% anual pagadero semestralmente.

Resolución

Se trata de un préstamo con un año de diferimiento y amortizable semestralmente por el método francés en los restantes períodos. El tipo de interés semestral es: $i^{(m)} = \frac{0{,}05}{2} = 0{,}025$. Se verifica:

$$C_0 = 4.570{,}35 \times a_{\overline{10}|2{,}5\%} \times 1{,}025^{-2} = 38.072{,}58 \text{ €}$$

3. Si 6.431,79 € es el importe de la quinta cuota de amortización de un préstamo de 8 años amortizable al 5% anual, mediante pagos anuales que crecen un 3% anual, hallar la cuantía del préstamo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

A partir de la quinta cuota de amortización A_5 podemos hallar el primer término amortizativo a_1: $a_5 = A_5 + I_5 \Rightarrow A_5 = a_5 - C_4 \times i = a_1 \times q^4 - C_4 \times i$, siendo:

$$C_4 = A_{(a_5,\, q=1{,}03)\overline{8-4}|5\%} = a_1 \times 1{,}03^4 \times \frac{1 - 1{,}03^{8-4} \times (1 + 0{,}05)^{-(8-4)}}{1 + 0{,}05 - 1{,}03}$$

Por consiguiente:

$$6.431{,}79 = a_1 \times 1{,}03^4 - \left[a_1 \times 1{,}03^4 \frac{1 - 1{,}03^{8-4} \times (1 + 0{,}05)^{-(8-4)}}{1 + 0{,}05 - 1{,}03}\right] \times 0{,}05 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad a_1 = 7.012{,}62$$

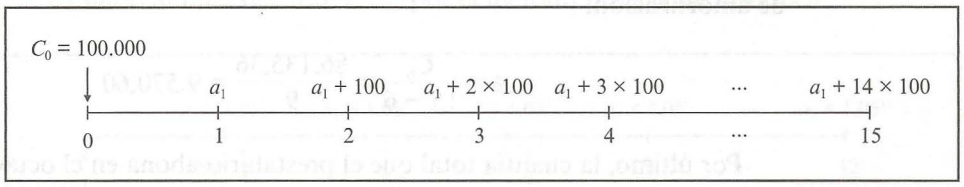
Una vez conocido a_1, hallamos la cuantía del préstamo C_0 planteando la ecuación de equivalencia financiera en el origen de la operación:

$$C_0 = 7.012{,}62 \frac{1 - 1{,}03^8 \times (1 + 0{,}05)^{-8}}{1 + 0{,}05 - 1{,}03} = 50.000{,}03 \text{ €}$$

4. Se pacta un préstamo de 100.000 € a amortizar en 15 años al 5% anual, mediante términos amortizativos que aumentan cada año en 100 €. Transcurridos los cuatro primeros años, el prestamista y el prestatario acuerdan renegociar la operación. Las nuevas condiciones son las siguientes: no pagar nada en el año 5; en el año 6 pagar sólo la cuota de interés, y en el resto de los años amortizar el préstamo a través de cuotas de amortización constantes. Teniendo en cuenta la renegociación, calcular la cuantía del término amortizativo del año 8.

Resolución

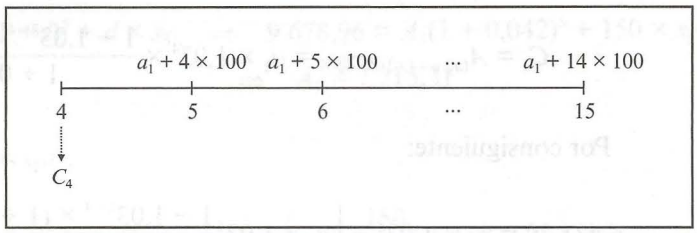
La cuantía del primer término amortizativo se obtiene a través del planteamiento de la ecuación de equivalencia financiera en el origen:



$$100.000 = \left(a_1 + 100 \times 15 + \frac{100}{0{,}05}\right) \times a_{\overline{15}|0{,}05} - \frac{100 \times 15}{0{,}05} \Rightarrow a_1 = 9.024{,}50$$

© Ediciones Pirámide

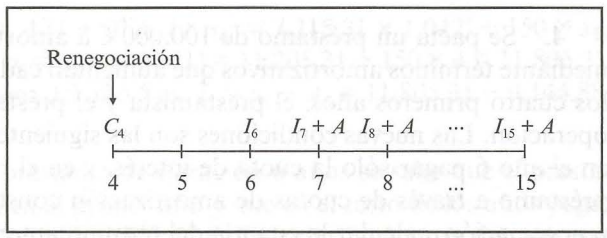
Para llevar a cabo la renegociación en el año 4, los sujetos necesitan saber el saldo de la operación inicial en dicho punto, el cual, según el método prospectivo, verifica:



$C_4 = A_{(a_5,\, d=100)\overline{15-4}|0,05}$, siendo $a_5 = a_1 + 4 \times d = 9.024{,}50 + 4 \times 100 = 9.424{,}50$. Por consiguiente:

$$C_4 = \left(9.424{,}50 + \frac{100}{0{,}05} + 100 \times 11\right) \times a_{\overline{11}|0,05} - \frac{100 \times 11}{0{,}05} = 82.033{,}68$$

El gráfico de la operación pendiente con las nuevas condiciones es:



El préstamo después de la renegociación tiene un año de diferimiento, ya que no se paga nada en el año 5, por lo que $C_5 = C_4(1 + i) = 82.033{,}68 \times 1{,}05 = 86.135{,}36$. El siguiente año es de carencia, pues sólo se pagan los intereses, no modificándose el saldo: $C_6 = C_5 = 86.135{,}36$. La cuantía C_6 se amortiza a través de cuotas de capital constantes en los nueve años restantes, siendo el importe de cada cuota de amortización:

$$A = \frac{C_6}{15 - 6} = \frac{86.135{,}36}{9} = 9.570{,}60$$

Por último, la cuantía total que el prestatario abona en el octavo año es:

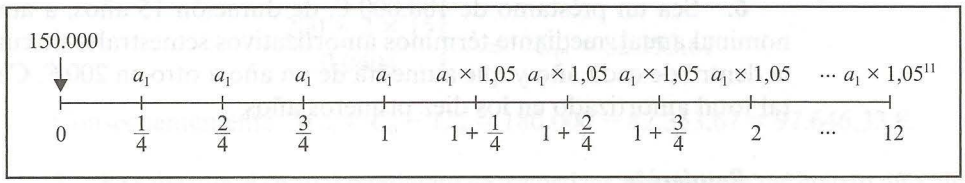
$$a_8 = A + I_8 = A + C_7 \times i = A + (C_6 - A) \times i =$$
$$= 9.570{,}60 + (86.135{,}36 - 9.570{,}60) \times 0{,}05 = 13.398{,}84\ €$$

© Ediciones Pirámide

5. Sea un préstamo de 150.000 € a amortizar en 12 años, al 6% anual pagadero trimestralmente, mediante términos amortizativos trimestrales constantes dentro de cada año y que aumentan de uno a otro en un 5%. Calcular el saldo al final del segundo trimestre del año 6.

Resolución

Los términos amortizativos son trimestrales y constantes dentro de un mismo año, pero crecen anualmente un 5%, constituyendo tales términos una renta trimestral fraccionada de una anual variable en progresión geométrica:



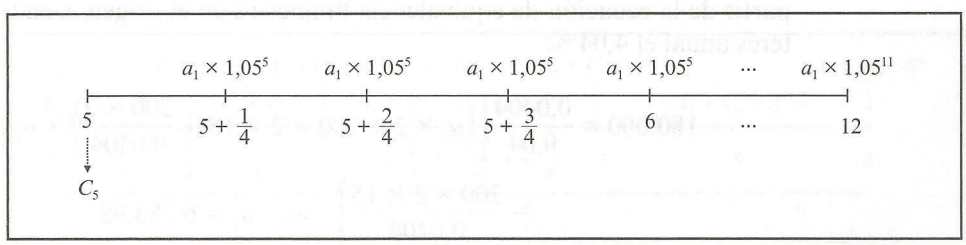
El saldo al final del segundo trimestre del año 6 lo podemos hallar a través de la siguiente expresión: $C_{5+\frac{2}{4}} = C_5\,(1 + i^{(m)})^2 - a_6 \times s_{\overline{2}|i^{(m)}}$. Para obtener a_6 hemos de tener en cuenta que los términos amortizativos crecen anualmente a razón de $q = 1{,}05$, por lo que se verifica: $a_6 = a_1 \times 1{,}05^5$.

El primer término amortizativo lo obtenemos planteando la ecuación de equivalencia financiera en el origen. Para ello hemos de tener presente que los términos amortizativos constituyen una renta trimestral fraccionada de una anual variable en progresión geométrica, verificándose: $C_0 = \dfrac{i}{j_{(m)}} \times A_{(a_1 \times 4,\, q=1{,}05)\overline{12}|i}$. El tipo de interés trimestral es el 1,5%, siendo su equivalente anual el 6,136355%. Por tanto:

$$150.000 = \frac{0{,}06136355}{0{,}06} \times a_1 \times 4\frac{1 - 1{,}05^{12}(1 + 0{,}06136355)^{-12}}{1 + 0{,}06136355 - 1{,}05} \Rightarrow a_1 = 3.438{,}48$$

Por consiguiente, $a_6 = 3.438{,}48 \times 1{,}05^5 = 4.388{,}47$.

El saldo al final del año 5, C_5, por el método prospectivo, verifica:



© Ediciones Pirámide

$$C_5 = \frac{i}{j_{(m)}} \times A_{(a_1 \times 1{,}05^5 \times 4,\ q=1{,}05)\overline{12-5}|i} = \frac{0{,}06136355}{0{,}06} \times 3.438{,}48 \times 1{,}05^5 \times$$
$$\times 4\frac{1 - 1{,}05^7(1 + 0{,}06136355)^{-7}}{1 + 0{,}06136355 - 1{,}05} \Rightarrow C_5 = 114.667{,}97$$

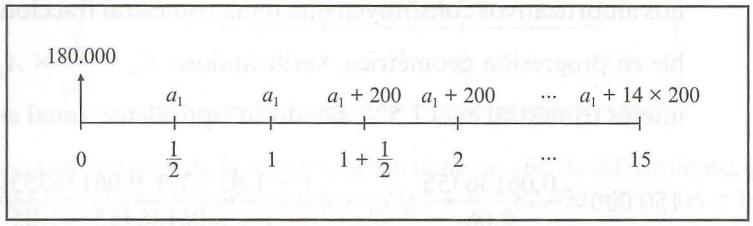
Una vez calculados a_6 y C_5 hallamos el saldo al final del segundo trimestre del año 6:

$$C_{5+\frac{2}{4}} = 114.667{,}97 \times 1{,}015^2 - 4.388{,}47 \times s_{\overline{2}|0{,}015} = 109.291{,}05\ €$$

6. Sea un préstamo de 180.000 €, de duración 15 años, a amortizar al 4% nominal anual, mediante términos amortizativos semestrales de cuantía constante dentro de cada año y que aumenta de un año a otro en 200 €. Calcular el capital total amortizado en los diez primeros años.

Resolución

Para calcular el capital amortizado hasta el año 10, $M_{10}^e = C_0 - C_{10}$, necesitamos conocer el saldo al final de dicho año, C_{10}. Para ello hemos de tener en cuenta que se trata de un préstamo amortizable mediante términos amortizativos semestrales que crecen cada año en 200 €, por lo que el conjunto de ellos constituye una renta semestral fraccionada de una anual variable en progresión aritmética de razón $d = 200 \times 2$:

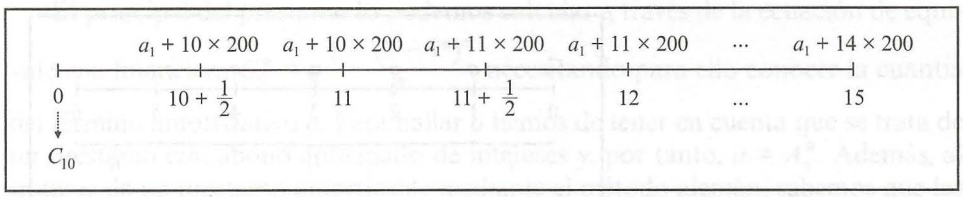


Como C_{10} es el valor financiero al final del año 10 de los términos amortizativos pendientes de vencer en dicho momento, para poder hallar el citado capital vivo, primero debemos calcular la cuantía del primer término amortizativo, a_1, a partir de la ecuación de equivalencia financiera en el origen, siendo el tipo de interés anual el 4,04%:

$$180.000 = \frac{0{,}0404}{0{,}04}\left[\left(a_1 \times 2 + 200 \times 2 \times 15 + \frac{200 \times 2}{0{,}0404}\right) \times a_{\overline{15}|4{,}04\%} - \right.$$
$$\left. - \frac{200 \times 2 \times 15}{0{,}0404}\right] \Rightarrow a_1 = 6.783{,}98$$

© Ediciones Pirámide

Por consiguiente, para C_{10} tenemos:



$$C_{10} = \frac{0{,}0404}{0{,}04}\left\{\left[(6.783{,}98 + 10 \times 200) \times 2 + 200 \times 2 \times 5 + \frac{200 \times 2}{0{,}0404}\right] a_{\overline{5}|0{,}0404} - \frac{200 \times 2 \times 15}{0{,}0404}\right\} \Rightarrow C_{10} = 82.353{,}67$$

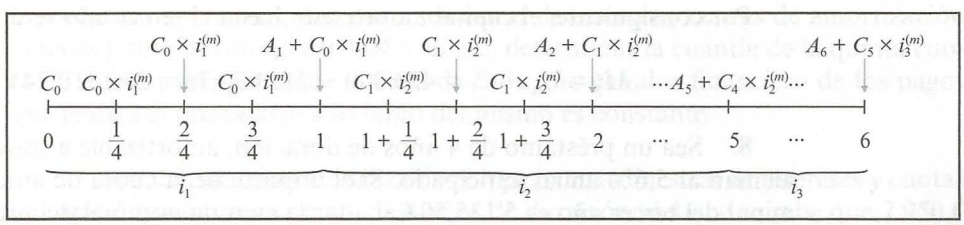
Consecuentemente, $M_{10}^{e} = C_0 - C_{10} = 180.000 - 82.353{,}67 = 97.646{,}33$ €.

7. Se sabe que el capital pendiente de amortizar al principio del cuarto año, de un préstamo amortizable en 6 años, es de cuantía 219.689,76 €, y que la operación se pacta a un tipo de interés nominal anual pagadero trimestralmente igual al 3% para el primer año, al 3,5% para los cuatro años siguientes y al 4% para el resto. Si se acuerda pagar trimestralmente las cuotas de interés y anualmente las cuotas de capital, y que el valor financiero al final de cada año de los pagos que se realizan a lo largo del mismo sea constante, obtener el capital amortizado hasta el año 3.

Resolución

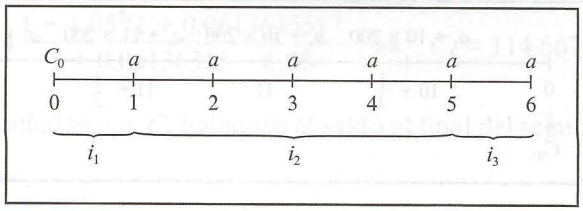
Se trata de un préstamo con cuotas de amortización anuales y con intereses fraccionados financieramente, es decir, que trimestralmente sólo se pagan las cuotas de interés y al final de cada año se abona la cuota de amortización correspondiente. A este préstamo con intereses fraccionados podemos asociarle un préstamo equivalente con pagos anuales y cuyas cuotas de amortización sean las mismas que las del préstamo con intereses fraccionados. Asimismo, al final de cada año el valor financiero de todos los pagos que se realizan en el mismo es siempre constante, por lo que el préstamo equivalente anual está constituido por términos amortizativos constantes.

Préstamo con intereses fraccionados:



© Ediciones Pirámide

Préstamo equivalente:



Como dentro de un mismo año el tipo de interés para cada trimestre es siempre el mismo, el tipo de interés anual con el que operar en el préstamo equivalente lo obtenemos aplicando simplemente la relación de tantos equivalentes en capitalización compuesta:

$$\text{Año 1: } (1 + i_1) = \left(1 + \frac{0{,}03}{4}\right)^4 \Rightarrow i_1 = 0{,}030339191$$

$$\text{Años 2, 3, 4 y 5: } (1 + i_2) = \left(1 + \frac{0{,}035}{4}\right)^4 \Rightarrow i_2 = 0{,}035462061$$

$$\text{Año 6: } (1 + i_3) = \left(1 + \frac{0{,}04}{4}\right)^4 \Rightarrow i_3 = 0{,}04060401$$

Por tanto, para calcular el capital amortizado hasta el año 3: $M_3^e = C_0 - C_3$, necesitamos hallar C_0 y C_3, para lo cual vamos a basarnos en el préstamo equivalente:

$$C_3 = 219.689{,}76 = a \times a_{\overline{2}|0{,}035462061} + a(1 + 0{,}04060401)^{-1}(1 + 0{,}03542061)^{-2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow a = 78.609$$

Planteando la ecuación de equivalencia financiera del préstamo equivalente, podemos obtener el principal del préstamo C_0:

$$C_0 = 78.609 \times 1{,}030339191^{-1} + 78.609 \times a_{\overline{4}|0{,}035462061} \times 1{,}030339191^{-1} +$$

$$+ 78.609 \times 1{,}04060401^{-1} \times 1{,}035462061^{-4} \times 1{,}030339191^{-1} \Rightarrow C_0 = 420.000$$

Por consiguiente, el capital amortizado hasta el tercer año será:

$$M_3^e = C_0 - C_3 = 420.000 - 219.689{,}76 = 200.310{,}24 \text{ €}$$

8. Sea un préstamo de 4 años de duración, amortizable a través del método alemán al 5,6% anual anticipado. Si el importe de la cuota de amortización nominal del tercer año es 5.135,50 €, hallar la cuantía nominal del préstamo.

© Ediciones Pirámide

Resolución

El principal del préstamo lo podemos calcular a través de la ecuación de equivalencia financiera $C_0^* = a\dfrac{1-(1-i^*)^n}{i^*}$, necesitando para ello conocer la cuantía del término amortizativo a. Para hallar a hemos de tener en cuenta que se trata de un préstamo con abono anticipado de intereses y, por tanto, $a = A_n^*$. Además, al tratarse de un préstamo amortizable mediante el método alemán, sabemos que las cuotas de capital nominales varían en progresión geométrica de razón $q = (1-i^*)^{-1}$. Por tanto, la última cuota de capital la calcularemos a partir de la correspondiente al año 3: $a = A_4^* = A_3^*(1-i^*)^{-1} = 5.135{,}50(1-0{,}056)^{-1} = 5.440{,}15$. En consecuencia, el principal del préstamo es: $C_0^* = 5.440{,}15\dfrac{1-(1-0{,}056)^4}{0{,}056} = 20.000$ €.

12.8. EJERCICIOS Y PROBLEMAS PROPUESTOS

1. Calcular la duración de un préstamo con términos amortizativos anuales que crecen anualmente un 4%, del que se sabe que el término amortizativo del año 3 asciende a una cuantía de 5.061,89 €, que el importe de la cuota de amortización del año 4 es 3.847,03 € y que el tipo de interés pactado es el 4% anual.

2. Sea un préstamo de cuantía X de 12 años de duración, amortizable al 4% anual. En el primer año no se abona cuantía alguna; en los años 2 y 3 sólo se pagan los intereses correspondientes, y en el resto de los años la amortización es con cuotas de capital constantes. Al principio del séptimo año se renegocia el préstamo, siendo las nuevas condiciones: realizar pagos anuales que crecen a razón del 1,5% anual y aumentar el tipo de interés hasta el 5%. Si se sabe que el importe de la cuota de interés del noveno año es 2.214,64 €, hallar la cuantía del préstamo.

3. Sea un préstamo de 110.000 €, amortizable en 14 años, al 6% nominal anual mediante pagos semestrales que crecen cada semestre en 90 €. Determinar en qué cuantía disminuye la deuda del prestatario en el primer semestre del año 9.

4. Si 40.820,34 € es el importe del capital amortizado hasta el quinto año de un préstamo de 6 años, con pago semestral de intereses, cuotas de amortización anuales y tipo de interés del 4,04% anual, determinar la cuantía de la quinta cuota de interés, si se sabe que al final de cada año el valor financiero de los pagos que realiza el prestatario a lo largo del mismo es constante.

5. Sea un préstamo amortizable con pago cuatrimestral de intereses y cuotas de capital constantes anuales, de 4 años de duración, del que se sabe que 7.950 €

© Ediciones Pirámide

es la cuantía total que paga el prestatario al final del año 2 y que la cuota de interés del segundo cuatrimestre del año 4 es de 150 €. Hallar el importe que paga el sujeto al final del segundo cuatrimestre del tercer año.

6. Hallar la duración de un préstamo amortizable a través del método alemán al 6% anual anticipado, del que se sabe que el importe de la cuota de amortización nominal del año 4 es 5.999,13 € y que la cuota de interés prepagable del año 6 es 1.301,76 €.

© Ediciones Pirámide