# FÓRMULAS DE MATEMÁTICAS FINANCIERAS

# TEMAS 1 Y 2: CONCEPTOS BÁSICOS

**Ley financiera**

$$V = \text{Proy}_{\text{p}}(C,t) = F(C,t;p)$$

$$F(C,t;p) = \begin{cases} L(C,t;p) & \text{para } t < p \\ A(C,t;p) & \text{para } t > p \end{cases}$$

<u>Propiedades:</u> (Ver pág. 27.)

**Suma financiera**

$$(C_1,t_1) + (C_1,t_1) + \ldots + (C_n,t_n) = (S,q)$$

$$\sum_{s=1}^{n} \text{Proy}_{\text{p}}(C_s,t_s) = \text{Proy}_{\text{p}}(S,q)$$

**Postulado de equivalencia financiera**

$$S = S'$$

Dado un punto de la operación, la suma financiera de la prestación (S) en ese punto coincide con la suma financiera de la contraprestación (S') en el mismo punto.

**Saldo financiero** (o reserva matemática)

Dado un punto *q*, descomponemos la prestación y la contraprestación así:

- $S_1$ y $S_1'$ se corresponden con la suma financiera de los capitales pasados, de la prestación y de la contraprestación respectivamente.
- $S_2$ y $S_2'$ se corresponden con la suma financiera de los capitales futuros, de la prestación y de la contraprestación respectivamente.

El saldo financiero puede calcularse por 2 métodos equivalentes.

<u>Retrospectivo:</u> $R_q = S_1 - S_1'$  <u>Prospectivo:</u> $R_q = S_2' - S_2$

$R_q > 0 \Rightarrow$ capital a favor de la prestación

$R_q < 0 \Rightarrow$ capital a favor de la contraprestación

Debemos distinguir entre saldo a la izquierda $\left(R_q^-\right)$ y saldo a la derecha $\left(R_q^+\right)$.

# TEMA 3: MAGNITUDES DERIVADAS

## M.D. DE CAPITALIZACIÓN

**Factor de capitalización**

$$u(t_1,t_2;p)=\frac{C_2}{C_1}$$

Fórmula alternativa:

$$u(t_1,t_2;p)=\frac{L(t_1;p)}{L(t_2;p)}>1$$

**Rédito de capitalización**

$$r(t_0,t_n;p)=u(t_0,t_n;p)-1$$

$$r(t_0,t_n;p)=\frac{C_2}{C_1}-1=\frac{C_2-C_1}{C_1}$$

**Rédito acumulado o referido a p**

$$\xi(t_1,t_2;p)=\mathrm{Proy}_{\mathrm{p}}\left[r(t_1,t_2;p),t_2\right]$$

$$\xi(t_1,t_2;p)=r(t_1,t_2;p)\times L(t_2;p)$$

Fórmula alternativa:

$$\xi(t_1,t_2;p)=L(t_1;p)-L(t_2;p)$$

**Tanto de capitalización**

$$\rho(t_1,t_2;p)=\frac{r(t_1,t_2;p)}{t_2-t_1}$$

## M.D. DE DESCUENTO

**Factor de descuento**

$$v(t_1,t_2;p)=\frac{C_1}{C_2}$$

Fórmula alternativa:

$$v(t_1,t_2;p)=\frac{A(t_2;p)}{A(t_1;p)}<1$$

**Rédito de descuento**

$$d(t_0,t_n;p)=1-v(t_0,t_n;p)$$

$$d(t_0,t_n;p)=1-\frac{C_1}{C_2}=\frac{C_2-C_1}{C_2}$$

**Tanto de descuento**

$$\delta(t_1,t_2;p)=\frac{d(t_1,t_2;p)}{t_2-t_1}$$

## PRECIO FINANCIERO (LEY DE CAPITALIZACIÓN)

Precio financiero total o interés total:

$$I=C_2-C_1=C_1\times r(t_1,t_2;p)$$

Precio financiero unitario:

$$\frac{I}{C_1}=\frac{C_2-C_1}{C_1}=r(t_1,t_2;p)$$

Precio financiero medio:

$$\frac{I}{C_1(t_2-t_1)}=\frac{r(t_1,t_2;p)}{t_2-t_1}=\rho(t_1,t_2;p)$$

## PRECIO FINANCIERO (LEY DE DESCUENTO)

Precio financiero total o descuento:

$$D=C_2-C_1=C_2\times d(t_1,t_2;p)$$

Precio financiero unitario de descuento:

$$\frac{D}{C_2}=\frac{C_2-C_1}{C_2}=d(t_1,t_2;p)$$

Precio financiero medio de descuento:

$$\frac{D}{C_2(t_2-t_1)}=\frac{d(t_1,t_2;p)}{t_2-t_1}=\delta(t_1,t_2;p)$$

# TEMA 4: SISTEMAS FINANCIEROS

## CAPITALIZACIÓN SIMPLE

$$L(t;p) = 1 + i(p-t)$$
$$C_n = C_0(1+ni)$$
$$I = C_n - C_0 = C_0 \cdot n \cdot i$$

Tantos equivalentes: $i^{(m)} = \dfrac{i}{m}$

Magnitudes derivadas:

$$u(t_0,t_n;p) = \frac{C_n}{C_0} = \ldots = 1 + n \cdot i$$
$$r(t_0,t_n;p) = u(t_0,t_n;p) - 1 = n \cdot i$$
$$\rho(t_0,t_n;p) = \frac{r(t_0,t_n;p)}{n} = i$$

## CAPITALIZACIÓN COMPUESTA

$$L(t;p) = (1+i)^{(p-t)}$$
$$C_n = C_0(1+i)^n$$
$$I = C_n - C_0 = C_0\left[(1+i)^n - 1\right]$$

Intereses periódicos: $I_s = C_{s-1} \cdot i_s$

Tantos equivalentes:

$$1 + i = \left(1 + i^{(m)}\right)^m$$

Magnitudes derivadas:

$$u(t_0,t_n;p) = \frac{C_n}{C_0} = \ldots = (1+i)^n$$
$$r(t_0,t_n;p) = u(t_0,t_n;p) - 1 = (1+i)^n - 1$$
$$\rho(t_0,t_n;p) = \frac{r(t_0,t_n;p)}{n} = \frac{(1+i)^n - 1}{n}$$

## DESCUENTO COMERCIAL SIMPLE

$$C_0 = C_n(1-nd)$$
$$D_{SC} = C_n \cdot n \cdot d$$

Tantos equivalentes: $d^{(m)} = \dfrac{d}{m}$

## OPERACIONES DE DESCUENTO BANCARIO

Descuento comercial:

$$E_C = C - D_{SC} - G - I$$

Descuento financiero:

$$E_C = C - D_{SC} - G - G' - T - I$$

Efectivo que recibe el banco:

$$E_B = C - D_{SC} - G$$

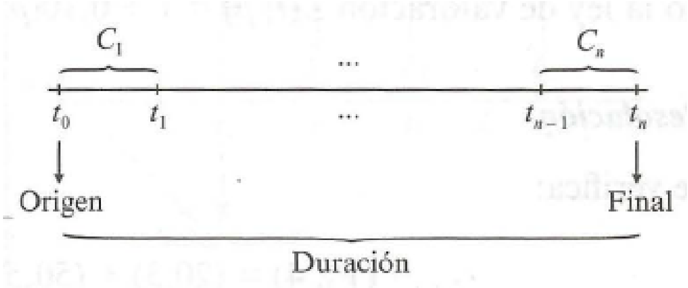
**Leyenda:**

$E_C$: efectivo que cobra el cliente
C: nominal de la letra
$D_{SC}$: cuantía del descuento
G: comisión por negociación
G': corretaje (honorarios del notario)
T: timbre de la letra
I: impuestos

# TEMA 5: RENTAS

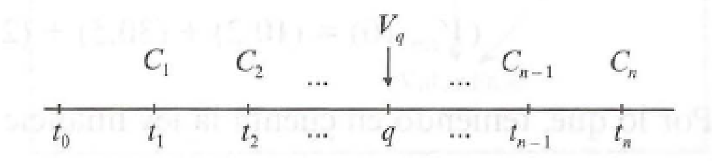
Conjunto de capitales financieros que han de hacerse efectivos en distintos vencimientos.

**Elementos básicos**




**Valor capital o financiero**

Valor capital en *q* de una renta es la suma financiera en ese punto (*q*) de los capitales que la constituyen.




**Dos valores importantes:**

<u>Valor inicial:</u> El calculado en el punto $t_0$. <u>Valor final:</u> El calculado en $t_n$ (o post.).

**Clasificación de las rentas**

Según…

- Cuantía: constantes, variables.
  Casos particulares de las variables: progresión aritmética o geométrica.
- Vencimiento de los términos: pospagables, prepagables.
- Medida intervalos: discretas, continuas. (Nos centramos en las discretas.)
- Duración: temporales, perpetuas.
- Punto de valoración: dependiendo de cómo se calcula el valor financiero.
  - Inmediatas: valor actual en el origen; valor final en el final.
  - Diferidas: el valor actual se calcula antes del origen (según se indique en *d*).
  - Anticipadas: el valor final se calcula después del final (según se indique en *h*).

# TEMA 6: VALORACIÓN DE RENTAS (I)

<u>Regla 6.1:</u> Relación entre el valor actual y el valor final:

$$V_f = V_0 (1+i)^n \qquad\qquad V_0 = V_f (1+i)^{-n}$$

<u>Regla 6.2:</u> Relación entre las rentas prepagable (con diéresis) y pospagable:

$$\ddot{V}_a = V_a (1+i) \qquad \ddot{V}_n = V_n (1+i) \qquad \ddot{V}_f = V_f (1+i)$$

**Valoración de rentas constantes pospagables**

C = cuantía de la renta (constante)

Valor actual: $V_0 = C \times a_{\overline{n}|i}$ Valor final: $V_n = C \times s_{\overline{n}|i}$

$$a_{\overline{n}|i} = \frac{1-(1+i)^{-n}}{i} \qquad\qquad s_{\overline{n}|i} = \frac{(1+i)^n - 1}{i}$$

**Valoración de rentas constantes prepagables**

Valor actual: $\ddot{V}_0 = C \times \ddot{a}_{\overline{n}|i}$ Valor final: $\ddot{V}_n = C \times \ddot{s}_{\overline{n}|i}$

$$\ddot{a}_{\overline{n}|i} = a_{\overline{n}|i}(1+i) = 1 + a_{\overline{n-1}|i} \qquad\qquad \ddot{s}_{\overline{n}|i} = s_{\overline{n}|i}(1+i) = 1 + s_{\overline{n-1}|i}$$

**Valoración de rentas constantes perpetuas**

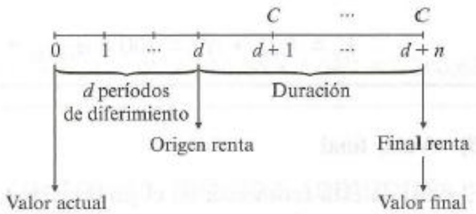
Pospagables: $a_{\overline{\infty}|i} = \lim_{n\to\infty} a_{\overline{n}|i} = \frac{1}{i}$ Prepagables: $\ddot{a}_{\overline{\infty}|i} = a_{\overline{\infty}|i}(1+i) = \frac{1+i}{i}$

* El valor final no puede calcularse.

**Valoración de rentas diferidas**

(d = períodos de diferimiento)

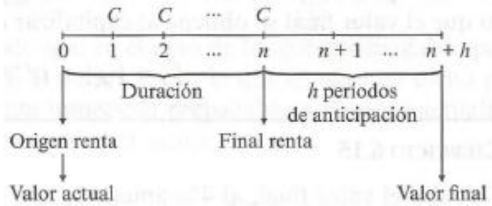
$$V_0 = V_d (1+i)^{-d}$$




**Valoración de rentas anticipadas**

(h = períodos de anticipación)

$$V_f = V_n (1+i)^h$$



# TEMA 7: VALORACIÓN DE RENTAS (II)

**Valoración de rentas en progresión aritmética**

Notación:

$A_{\overline{(C_1,d)n}|i}$ → valor actual

$S_{\overline{(C_1,d)n}|i}$ → valor final

$C_1$ → capital inicial

d → incremento

Pospagables:

$$A_{\overline{(C_1,d)n}|i} = \left(C_1 + d \times n + \frac{d}{i}\right) \times a_{\overline{n}|i} - \frac{d \times n}{i}$$

$$S_{\overline{(C_1,d)n}|i} = A_{\overline{(C_1,d)n}|i}\left(1+i\right)^n$$

Prepagables: (Ver regla 6.2.)

Perpetuas:

$$A_{\overline{(C_1,d)\infty}|i} = \left(C_1 + \frac{d}{i}\right)\frac{1}{i}$$

Bonus:

Para calcular la cuantía de un término en función de otro:

$$a_s = a_1 + d\left(s-1\right)$$

**Valoración de rentas en progresión geométrica**

Notación:

$A_{\overline{(C_1,q)n}|i}$ → valor actual

$S_{\overline{(C_1,q)n}|i}$ → valor final

$C_1$ → capital inicial

q → razón

Pospagables:

$$A_{\overline{(C_1,q)n}|i} = C_1 \frac{1-q^n\left(1+i\right)^{-n}}{1+i-q}$$

$$S_{\overline{(C_1,q)n}|i} = A_{\overline{(C_1,q)n}|i}\left(1+i\right)^n$$

Caso especial → Cuando $q = 1+i$:

$$A_{\overline{(C_1,q=1+i)n}|i} = \frac{C_1 \times n}{1+i}$$

Prepagables: (Ver regla 6.2.)

Perpetuas:

Sólo tiene sentido si $q < \left(1+i\right)$.

$$A_{\overline{(C_1,q)\infty}|i} = \frac{C_1}{1+i-q}$$

# TEMA 8: VALORACIÓN DE RENTAS (III)

**Rentas fraccionadas**

Se calcula la renta fraccionada en función de la renta entera.

$$V_a^{(m)} = \frac{i}{j(m)} \times V_a \qquad V_f^{(m)} = \frac{i}{j(m)} \times V_f$$

(Ver ejercicios 8.3 hasta 8.6, a partir de la pág. 201.)

<u>Prepagables:</u> Primero se calcula la renta de la pospagable, y luego:

$$\ddot{V}_a^{(m)} = V_a^{(m)} \left(1 + i^{(m)}\right)$$

**Rentas continuas**

Se calcula la renta continua en función de la renta entera.

$$\bar{V}_a = \frac{i}{k} \times V_a \qquad \bar{\ddot{V}}_a = \bar{V}_a$$

**Rentas de periodicidad superior a la unidad de tiempo**

Calcularemos una renta de *n* términos que vencen cada *t* periodos.

Ejemplo: renta de 60 € cada 3 años, en 10 trienios. → n = 10, t = 3.

$$V_0 = \frac{C}{s_{\overline{t}|i}} \times a_{\overline{nt}|i}$$

# TEMA 9: OPER. DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS (I)

(Se corresponde con el tema 10 del libro.)

**Ecuación dinámica del capital vivo**

$$C_s = C_{s-1}\left(1+i_s\right) - a_s$$

- $C_s$: capital vivo o capital pendiente de amortizar (al final del período).

(Es el saldo financiero a la derecha.)

Podemos despejar el <u>término amortizativo</u> ($a_s$):

$$a_s = \underbrace{\left(C_{s-1} - C_s\right)}_{\text{cuota de amortización}} + \underbrace{\left(C_{s-1} \times i_s\right)}_{\text{cuota de interés}} = A_s + I_s$$

**Ecuación fundamental de equivalencia financiera**

Equivalencia financiera en el origen:

$$C_0 = a_1\left(1+i\right)^{-1} + a_2\left(1+i\right)^{-2} + \ldots + a_2\left(1+i\right)^{-n} \quad \Rightarrow \quad C_0 = \sum_{h=1}^{n} a_h\left(1+i\right)^{-h}$$

Equivalencia financiera en el final:

$$C_0\left(1+i\right)^n = a_1\left(1+i\right)^{n-1} + a_2\left(1+i\right)^{n-2} + \ldots + a_n \quad \Rightarrow \quad C_0\left(1+i\right)^n = \sum_{h=1}^{n} a_h\left(1+i\right)^{n-h}$$

**Capital vivo o saldo financiero**

Método retrospectivo:

$$R_q = S_1 - S_1'$$

Método prospectivo:

$$R_q = S_2' - S_2$$

Método recurrente: consiste en usar la ecuación del capital vivo.

- El saldo financiero se calcula a la derecha.
- Ver ejercicio 10.7 de la pág. 256.

**Capital total amortizado**

Es la suma de las cuotas de amortización pagadas hasta un momento dado.

$$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h$$

$$M_s^e = C_0 - C_s$$

Además, el capital vivo es la suma de las cuotas de amortización pendientes.

$$C_s = C_0 - M_s^e = \sum_{h=1}^{n} A_h - \sum_{h=1}^{s} A_h = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}$$

# TEMA 10: OPER. DE AMORTIZACIÓN DE PRÉSTAMOS (II)

(Se corresponde con los temas 11 y 12 del libro.)
(Del 12 únicamente: 12.2; 12.3; 12.5)

**Método francés**
Los términos amortizativos y el tipo de interés son de cuantía constante.

a) Ecuación de equivalencia financiera:
   $C_0 = a \times a_{\overline{n}|i}$
b) Ley de variación de las cuotas de amortización:
   $A_s = A_1 (1+i)^{s-1}$
c) Capital total amortizado:
   $$M_s^e = \sum_{h=1}^{s} A_h = A_1 \times s_{\overline{s}|i}$$
   En el último período:
   $$M_n^e = C_0 = A_1 \times s_{\overline{n}|i} \quad \Rightarrow \quad A_1 = \frac{C_0}{s_{\overline{n}|i}}$$
d) Capital vivo o saldo financiero:
   1. Método recurrente: $C_s = C_{s-1}(1+i) - a$
   2. Método retrospectivo: $C_s = C_0 (1+i)^s - a \times s_{\overline{s}|i}$
   3. Método prospectivo: $C_s = a \times a_{\overline{n-s}|i}$
   4. En función del capital total amortizado:
   $$C_s = C_0 - M_s^e = C_0 - A_1 \times s_{\overline{s}|i} = C_0 - \frac{C_0}{s_{\overline{n}|i}} \times s_{\overline{s}|i} = C_0 \left(1 - \frac{s_{\overline{s}|i}}{s_{\overline{n}|i}}\right)$$

**Método americano simple**
El prestatario sólo paga intereses hasta el final, en donde paga la cuota amortizativa.
$A_n = C_0 \quad M_{n-1}^e = 0$
$C_1 = ... = C_{n-1} = C_0$

Términos amortizativos:
$a_s = I_s = C_0 \times i_s$
$a_n = A_n + I_n = C_0 + C_0 \times i_n$

**Método americano con fondo**

Combina 2 operaciones:

- Un préstamo por el método americano simple.
- Una operación de constitución para formar el capital del préstamo.
  (Se realizan aportaciones para no tener que pagar tanto dinero al final.)

<u>Caso 1:</u> La cantidad aportada mensual (*f*) al fondo es constante.

$$C_0 = f \times s_{\overline{n}|i'}$$

Cuantía que desembolsa el prestatario en cada período:

$$a'_s = I_s + f$$

Montante constituido al final de un período:

$$F_s = f \times s_{\overline{n}|i'}$$

Capital pendiente de constituir o saldo neto de la operación conjunta:

$$C'_s = C_0 - F_s$$

**Método de cuota de amortización constante (o método italiano)**

Las cuotas de amortización son todas de la misma cuantía.

$$C_0 = M_n^e = n \times A \quad \Rightarrow \quad A = \frac{C_0}{n}$$

Capital total amortizado:

$$M_s^e = s \times A$$

Capital vivo o saldo financiero:

$$C_s = C_0 - M_s^e = \ldots = (n-s)A$$

<u>Caso particular: Tipo de interés constante</u>

Los intereses a pagar son decrecientes porque cada vez se debe menos dinero.

Ley de variación de los términos amortizativos (varían en progresión aritmética):

$$a_{s+1} = a_s - Ai \qquad a_s = a_1 + d(s-1) \qquad d = -Ai$$

Para obtener el primer término amortizativo:

$$a_1 = I_1 + A = C_o i + \frac{C_0}{n}$$

**Amortización con términos variables en progresión geométrica**

Ecuación de equivalencia financiera:

$$C_0 = A_{(a_1,q)\overline{n|}i}$$

Capital vivo o saldo financiero:

- Método retrospectivo:

  $$C_s = C_0 \left(1+i\right)^s - S_{(a_1,q)\overline{s|}i}$$

- Método prospectivo:

  $$C_s = A_{(a_{s+1},q)\overline{n-s|}i}$$

Ley de variación de las cuotas de amortización:

(…) (No usaremos esta fórmula en los ejercicios. Puede preguntarse teóricamente.)

**Amortización con términos variables en progresión aritmética**

(Similar al apartado anterior, pero usando rentas en progresión aritmética.)

Ley de variación de las cuotas de amortización:

(…) (No usaremos esta fórmula en los ejercicios. Puede preguntarse teóricamente.)

A partir de esa fórmula se obtiene esta otra, que sí se usa en los ejercicios:

$$A_{s+1} = A_1 \left(1+i\right)^s + d \times s_{\overline{s|}i}$$

**Préstamo con períodos de carencia**

En los períodos de carencia sólo se paga cuota de interés.

A lo largo del período de carencia se verifica: $C_s = C_{s-1}$

**Préstamo con períodos de diferimiento**

En los períodos de diferimiento no se paga nada (ni amortización ni intereses).

A lo largo de ese período se verifica: $C_s = C_0 \left(1+i\right)^s$

# TEMA 11: PRÉSTAMOS AMORTIZABLES CON TIPOS DE INTERÉS REFERENCIADOS O INDICIADOS

(Se corresponde con el tema 13 del libro.)

Préstamos con tipos de interés referenciados:

$j = j_r + d$

- j = tipo de interés nominal
- $j_r$ = índice de referencia
- d = margen o diferencial

**Método con t.a. predeterminados**

- El término amortizativo es constante. La duración es indefinida.
- Las cuotas de interés y amortización se calculan en cada año.

**Método con t.a. posdeterminados y plan de amortización predeterminado**

- A priori, se conoce la duración y la cuota de amortización.
- Las cuotas de interés se calculan en cada año.
  El término amortizativo es la suma: $a_s = A_s + I_s$

**Método con t.a. posdeterminados y plan de amortización posdeterminado**

A priori, sólo se conoce la duración del préstamo.

Se aplica el sistema francés generalizado.

En cada revisión, se plantea la ecuación de equivalencia financiera para calcular los términos amortizativos que se pagarán hasta el siguiente período de revisión.

$C_s = a_{s+1} \times a_{\overline{n-s|}i}$

# TEMA 12: VALOR FINANCIERO DEL PRÉSTAMO, DEL USUFRUCTO Y DE LA NUDA PROPIEDAD

a) **Valor financiero total:** Es el valor actualizado, al tipo de interés de valoración i', de los <u>términos amortizativos</u> pendientes de vencimiento.
(Es similar a calcular el saldo financiero por el método prospectivo.)

$$V_s = \sum_{h=1}^{n-s} a_{s+h}\left(1+i'\right)^{-h}$$

b) **Valor financiero del usufructo:** El es el valor actualizado, al tipo de interés de valoración i', de las <u>cuotas de interés</u> pendientes de vencimiento.

$$U_s = \sum_{h=1}^{n-s} I_{s+h}\left(1+i'\right)^{-h}$$

c) **Valor financiero de la nuda propiedad:** El es el valor actualizado, al tipo de interés de valoración i', de las <u>cuotas de amortización</u> pendientes de vencimiento.

$$N_s = \sum_{h=1}^{n-s} A_{s+h}\left(1+i'\right)^{-h}$$

El valor financiero total puede expresarse así: $V_s = U_s + N_s$

**Fórmula de Achard**
Permite calcular el usufructo en los préstamos con tipo de interés constante.

$$U_s = \frac{i}{i'}\left(C_s - N_s\right)$$

(No es necesario conocer la demostración de esta fórmula.)

**Valoración en métodos particulares de amortización**

- Método francés: ver ejercicio 14.4.
  - La nuda propiedad también puede calcularse calculando el valor actual de la renta de las cuotas de amortización (renta en progresión geométrica) .
- Método americano: ver ejercicio 14.5
- Método de cuotas de amortización constantes: ver ejercicio 14.6.
  - El valor financiero total también puede calcularse calculando el valor actual de la renta de los términos amortizativos (renta en progresión aritmética) .
- Términos variables en progresión geométrica: ver ejercicio 14.4.4.