

Apellidos y Nombre:

DNI:

El examen consta de cinco preguntas en esta parte teórica, más una parte de ordenador, que se celebrará a continuación.

Se dispone de dos horas y media para la realización de esta parte teórica. Se recuerda que las respuestas sólo serán válidas si vienen acompañadas de la explicación correspondiente.

Iniciar la respuesta a cada pregunta en una hoja separada.

Las notas se harán públicas el lunes día 18 de junio. La revisión de exámenes se realizará los días 19 y 20 de junio de 11 a 12 horas.

1. Dadas dos acciones, X e Y, se conoce que la función de densidad conjunta para el rendimiento semanal de cada una es

$$f(x,y) = k(x^2 + y^2) \quad \text{para } 0 \leq x \leq 2 ; 0 \leq y \leq 3$$

Se pide:

- (0,5 puntos) Valor de k para que $f(x,y)$ sea función de densidad
- (0,5 puntos) Función de distribución marginal de X
- (1 punto) Por motivos operativos se conoce que el rendimiento máximo de la acción X es la mitad del posible. ¿Cuál es la probabilidad de que el rendimiento de Y sea como máximo 2, dada la información disponible de X?

$$\text{a) } \int_0^2 \int_0^3 k(x^2 + y^2) dx dy = 1 ; \quad k \int_0^2 \int_0^3 (x^2 + y^2) dx dy = 1 ; \quad k \int_0^2 x^2 y + \frac{y^3}{3} \Big|_0^3 dx = 1$$

$$k \int_0^2 3x^2 + 9 dx = 1 ; \quad k \left[\frac{3x^3}{3} + 9x \right]_0^2 = 1 \Rightarrow k = 1/26$$

$$\text{b) } f(x) = \int_0^3 \frac{x^2 + y^2}{26} dy = \frac{x^2 y + \frac{y^3}{3}}{26} \Big|_0^3 = \frac{3x^2 + 9}{26} ; \quad F(x) = \int_0^x \frac{3x^2 + 9}{26} dx = \frac{\frac{3x^3}{3} + 9x}{26} = \frac{x^3 + 9x}{26}$$

$$\text{c) } P(y \leq 2/x \leq 1) = \frac{P(y \leq 2 \cap x \leq 1)}{P(x \leq 1)} ;$$

$$P(y \leq 2 \cap x \leq 1) = \int_0^1 \int_0^2 \frac{x^2 + y^2}{26} dx dy = \int_0^1 \frac{x^2 y + \frac{y^3}{3}}{26} \Big|_0^2 dx = \int_0^1 \frac{2x^2 + 8/3}{26} dx = \frac{\frac{2x^3}{3} + \frac{8x}{3}}{26} \Big|_0^1 = 10/78$$

$$P(x \leq 1) = F_x(1) = 10/26$$

$$P(y \leq 2/x \leq 1) = \frac{10/78}{10/26} = 1/3$$

2. El responsable de la ITV sabe por experiencia que el 10% de los coches que se revisan presentan alguna avería grave.
- (0,5 puntos) Si en revisar cada coche se tarda aproximadamente 15 minutos ¿cuál será el tiempo total de revisión esperado hasta terminar la revisión del primer coche con avería grave?
 - (0,5 puntos) ¿Cuál será la probabilidad de tener que revisar 20 coches sin averías graves antes de encontrar el segundo con avería grave?
 - (1 punto) Supongamos ahora que tenemos un grupo de 20 coches, de los cuales 12 tienen avería grave. Si el dueño del taller selecciona al azar cinco de ellos, ¿cuál será la probabilidad de que 2 tengan avería grave?

- a) X = número de coches sin avería grave antes del primer coche con avería grave.
 X sigue una $G(0,10)$

T = tiempo total de revisión; $T = 15 \cdot X + 15$

$$E(T) = 15 \cdot E(X) + 15$$

$$E(X) = q/p = 0,9/0,1 = 9 \text{ coches}$$

$$E(T) = 15 \cdot 9 + 15 = 150 \text{ minutos.}$$

- b) Y = número de coches revisados sin avería antes del segundo con avería grave.
 Y sigue una BN ($r=2$; $p=0,1$)

$$P(Y=20) = \binom{20+2-1}{20} 0,9^{20} 0,1^2 = 0,02553 = 2,55\%$$

- c) W = número de coches con avería grave entre los cinco elegidos al azar del grupo de veinte.. Sigue una $H(N=20$; $n=5$; $p=0,6$)

$$P(W=2) : \frac{\binom{Np}{2} \binom{Nq}{n-2}}{\binom{N}{n}} = \frac{\binom{12}{2} \binom{8}{3}}{\binom{20}{5}} = 0,23839 = 23,84\%$$

3. El ingreso medio que consigue una persona en un determinado trabajo A es de 200 um, y con un mínimo del 90% de probabilidad el valor es como máximo de 240 um.
- (0,5 puntos) Si en otro determinado trabajo B alcanzan una media de ingresos de 210 um y una varianza de 220, ¿cuál de las dos presenta mayor variabilidad?
 - (0,5 puntos) Si en el trabajo A cogemos la media de tres personas, ¿qué probabilidad hay de que supere las 230 um?
 - (1 punto) Si para realizar un viaje estuvieran 80 personas del trabajo A dispuestas a gastarse todo su dinero, y el coste total del viaje para las 80 personas fuera de 15925 um ¿Qué probabilidad hay de que reúnan el dinero?

a) $P(|x - \mu| \leq k) \geq 1 - \sigma^2/k^2 = 0,90 \therefore$ dado que $k = 40$, $\sigma^2 = 160$; $\sigma = 12,65$

$$CVPA = 12,65/200 = 0,06325$$

$$CVPB = 14,83/210 = 0,070$$

b) $Y =$ media de tres personas, que sigue una distribución $N(\mu = 200; \sigma^2 = 160/3)$

$$P(|x - \mu| \geq 30) \geq \sigma^2/k^2 = 53,33/30^2 = 5,93\%$$

c) $W =$ ingreso total de 80 personas, sigue una distribución $N(\mu = 80 \cdot 200; \sigma^2 = 80 \cdot 160)$.

$$P(W \geq 15925) = P(Z \geq -0,66). F(0,66) = 74,54\%$$

4. El número de días que un estudiante de Estadística tarda en preparar la asignatura para examen es una variable aleatoria con función de distribución:
 $F(x) = 1 - (5/x)^2$ para $x \geq 5$.
- (0,5 puntos) Calcular el porcentaje de alumnos que tarda más de 25 días
 - (0,5 puntos) Calcular el tiempo medio que tarda un estudiante en preparar la asignatura.

a) $P(X > 25) = 1 - P(X \leq 25) = 1 - F(25) = 4\%$

b) $E(X) = \int_5^{\infty} xf(x)dx$

$$f(x) = F'(x) = \left[1 - \left(\frac{5}{x} \right)^2 \right]' = [1 - 25x^{-2}]' = 50x^{-3} = 50/x^3$$

$$E(X) = \int_5^{\infty} x \frac{50}{x^3} dx = 50 \int_5^{\infty} x^{-2} dx = 10 \text{ días.}$$

5. (1 punto) Se conoce la siguiente información relativa a tres sucesos (A, B y C):

$P(A \cup B)$	$P(B \cup C)$	$P(A \cap B)$	$P(A \cap C)$	$P(B/C)$	$P(A/B)$
0,78	0,70	0,37	0,15	0,48	0,62

Se pide hallar la probabilidad de los sucesos A, B, B/A, C, $B \cap C$ (0,2 puntos cada respuesta).

- $P(B) = P(A \cap B) / P(A/B) = 0,37 / 0,62 = 0,5968$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$; $P(A) = P(A \cup B) - P(B) + P(A \cap B) = 0,78 + 0,37 - 0,5968 = 0,5532$
- $P(B/A) = P(A \cap B) / P(A) = 0,37 / 0,5532 = 0,6688$
- $P(B \cup C) = P(B) + P(C) - P(B \cap C)$; $0,70 = 0,5968 + P(C) - [P(B/C) \cdot P(C)]$;
 $0,70 = 0,5968 + P(C) - 0,48 P(C)$; $P(C) = 0,1884$
- $P(B \cap C) [P(B/C) \cdot P(C)] = 0,48 \cdot 0,1884 = 0,0905$

LICENCIATURA EN ECONOMÍA. ESTADÍSTICA II. Junio 2007

Apellidos y Nombre:

DNI:

Se dispone de media hora para la realización del examen práctico.

En la parte A deben ponerse los resultados de forma clara y legible en el sitio correspondiente. En la parte B debe responderse indicando el planteamiento del problema y la interpretación del resultado.

PARTE A.- Escribir resultados de forma legible en columna derecha. Cada uno de los apartados vale 0,2 puntos.

$P(0 < \chi^2_4 < 1)$	
$P(t_4 > a) = 0,98;$	$a =$
$P(F_{2,14} > 3,02)$	
$P(4,6 \leq \chi^2_7 \leq a) = 0,5$	$a =$
$P(t_{13} \leq 1,5)$	

PARTE B.- Escribir el planteamiento del problema, el resultado y su interpretación.

El precio de los libros de texto sigue una distribución Normal con media 50 euros. El porcentaje de estudiantes que compra libros de texto y paga menos de 30 euros es del 15,87%. ¿Qué porcentaje de estudiantes paga entre 20 y 40 euros por la compra de libros de texto?

La variable sigue una distribución Normal con media 50 y varianza desconocida.

$$P(X \leq 30) = 0,1587; P(Z \leq (30-50)/\sigma) = 0,1587$$

$$(30-50)/\sigma = -1; \sigma = 20 \text{ euros.}$$

Por tanto, la variable X sigue una distribución Normal, con media 50 y desviación 20.

$$P(20 \leq X \leq 40) = 0,2417$$

