

1) Obtener el dominio de la función $f(x) = \ln(3x^2 - 12)$.

Como un logaritmo sólo puede calcularse de un número mayor que 0:

$$3x^2 - 12 > 0$$

Para resolver la inecuación, veamos el punto de corte¹:

$$3x^2 - 12 = 0 \rightarrow 3x^2 = 12 \rightarrow x = \sqrt{12/3} = \sqrt{4} \rightarrow x = \pm 2$$

Colocamos los puntos de corte en la recta real (omitido por estar escrito en Word) y estudiamos el signo de x en cada intervalo.

$$x \in (-\infty, -2): x = -3 \rightarrow 3 * (-3)^2 - 12 = 15 > 0$$

$$x \in (-2, 2): x = 0 \rightarrow 3 * 0^2 - 12 = -9 < 0$$

$$x \in (2, +\infty): x = 3 \rightarrow 3 * 3^2 - 12 = 15 > 0$$

Por tanto, la solución de la inecuación es:

$$x < -2 \vee x > 2$$

(Son los valores que hacen que $3x^2 - 12 > 0$.)

$$\text{Dom}(f) = (-\infty, -2) \cup (2, +\infty)$$

2) Obtener el dominio de la función $f(x) = \frac{2x + \ln(x+4)}{\sqrt{x^2 + x - 6}}$.

El interior del logaritmo debe ser positivo:

$$x + 4 > 0 \rightarrow x > -4$$

El interior de la raíz no puede ser negativo:

$$x^2 + x - 6 \geq 0$$

Además, el denominador no puede ser 0:

$$\sqrt{x^2 + x - 6} \neq 0 \rightarrow x^2 + x - 6 \neq 0$$

A partir de las 2 condiciones anteriores, sabemos que el interior de la raíz será positivo:

$$x^2 + x - 6 > 0$$

¹ No sé si así está bien explicado.

Para resolver la inecuación, veamos los puntos de corte:

$$x^2 + x - 6 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-6)}}{2 \cdot 1}$$

$$x = -3 \vee x = 2$$

Colocamos los puntos de corte en la recta real (omitido por estar escrito en Word).

Estudiamos el signo de x para cada intervalo.

$$x \in (-\infty, -3): \quad x = -4 \rightarrow (-4)^2 + (-4) - 6 = 6 > 0$$

$$x \in (-3, 2): \quad x = 0 \rightarrow 0^2 + 0 - 6 = -6 < 0$$

$$x \in (2, +\infty): \quad x = 4 \rightarrow 4^2 + 4 - 6 = 14 > 0$$

Por tanto, la solución de la inecuación es:

$$x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty)$$

Juntando esta condición con la del logaritmo, concluimos:

$$x \in (-\infty, -3) \cup (2, +\infty) \wedge x > -4$$

$$\text{Dom}(f) = (-4, -3) \cup (2, +\infty)$$

3) Obtener el dominio de la función $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 4x + 3}}$.

El interior de la raíz no puede ser negativo:

$$x^2 - 4x + 3 \geq 0$$

Además, el denominador no puede ser 0:

$$\sqrt{x^2 - 4x + 3} \neq 0 \rightarrow x^2 - 4x + 3 \neq 0$$

A partir de las 2 condiciones anteriores, sabemos que el interior de la raíz será positivo:

$$x^2 - 4x + 3 > 0$$

Para resolver la inecuación, veamos los puntos de corte:

$$x^2 - 4x + 3 = 0$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-(-4) \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 3}}{2 \cdot 1}$$

$$x = 3 \vee x = 1$$

Colocamos los puntos en la recta real (omitido) y estudiamos el signo de x en cada intervalo.

$$x \in (-\infty, 1): \quad x = 0 \rightarrow 0^2 - 4 \cdot 0 + 3 = 3 > 0$$

Como las raíces son simples, el signo cambia al pasar de intervalo.

$$x \in (1,3): < 0$$

$$x \in (3,+\infty): > 0$$

Por tanto, la solución de la inecuación es:

$$x \in (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$$

$$\text{Dom}(f) = (-\infty,1) \cup (3,+\infty)$$

4) Dadas $f(x) = \frac{x}{1-x}$ y $g(x) = \sqrt{x-1}$, obtener $\text{Dom}(g \circ f)$.

$$g \circ f = g(f(x)) = g\left(\frac{x}{1-x}\right) = \sqrt{\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1}$$

Por tanto hay que calcular el dominio de la función:

$$\text{Dom}(g \circ f) = \text{Dom}\left(\sqrt{\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1}\right)$$

El denominador no puede ser 0:

$$1-x \neq 0 \rightarrow x \neq 1$$

El interior de la raíz no puede ser negativo:

$$\left(\frac{x}{1-x}\right) - 1 \geq 0$$

En una inecuación racional como esta, hay que dejar una sola fracción a un lado, y 0 al otro.

Para ello reducimos a común denominador.

$$\frac{x}{1-x} - \frac{1(1-x)}{1-x} = \frac{x-(1-x)}{1-x} = \frac{2x-1}{1-x} \geq 0$$

Ahora estudiamos las raíces del numerador y del denominador.

$$2x-1=0 \rightarrow 2x=1 \rightarrow x=\frac{1}{2}$$

$$1-x=0 \rightarrow x=1$$

Colocamos los puntos en la recta real (omitido) y estudiamos el signo de x en cada intervalo.

$$x \in \left(-\infty, \frac{1}{2}\right): x=0 \rightarrow \frac{2*0-1}{1-0} = -1 < 0$$

$$x \in \left(\frac{1}{2}, 1\right): x = \frac{3}{4} \rightarrow \frac{2*(3/4)-1}{1-(3/4)} = 2 > 0$$

$$x \in (1, +\infty): x=2 \rightarrow \frac{2*2-1}{1-2} = -3 < 0$$

A partir del estudio del signo, la inecuación tendría como solución:

$$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

Pero hay que tener en cuenta que el denominador no puede ser 0, por lo que debemos descartar el valor 1. La solución de la inecuación es:

$$x \in \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

Por último, tendríamos que juntar esta condición con la del principio (que el denominador no se anule), pero esto ya lo hemos considerado al resolver la inecuación anterior. Por tanto:

$$\text{Dom}(f) = \left[\frac{1}{2}, 1\right)$$

5) Dadas $f(x) = x^3 e^x$ y $g(x) = \ln x$, hallar el valor de $(f \circ g)\left(\frac{1}{e}\right)$

(esto es, $(f \circ g)(x)$ cuando $x = \frac{1}{e}$).

$$f \circ g = f(g(x)) = f(\ln x) = (\ln x)^3 e^{\ln x} = (\ln x)^3 x$$

$$(f \circ g)\left(\frac{1}{e}\right) = \left(\ln \frac{1}{e}\right)^3 \frac{1}{e} = (-1)^3 \frac{1}{e} = -\frac{1}{e}$$

6) Dadas $f(x) = e^{1+x}$ y $g(x) = \frac{1}{\ln(x^2+2)}$, obtener la expresión de $(g \circ f)(x)$.

$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(e^{1+x}) = \frac{1}{\ln\left(\left(e^{1+x}\right)^2 + 2\right)} = \frac{1}{\ln\left(e^{2+2x} + 2\right)}$$

7) Obtener la inversa de la función $f(x) = \sqrt{\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)}$.

Para obtener la inversa hay que despejar la x a un lado:

$$y = \sqrt{\ln\left(\frac{x+2}{2}\right)} \rightarrow y^2 = \ln\left(\frac{x+2}{2}\right) \rightarrow e^{y^2} = \frac{x+2}{2} \rightarrow 2e^{y^2} = x+2$$

$$x = 2e^{y^2} - 2 \rightarrow f(x)^{-1} = 2e^{x^2} - 2$$

8) Hallar la inversa de la función $f(x) = \sqrt{1-4e^{2x}}$.

$$y = \sqrt{1-4e^{2x}} \rightarrow y^2 = 1-4e^{2x} \rightarrow y^2 - 1 = -4e^{2x} \rightarrow \frac{y^2 - 1}{-4} = e^{2x}$$

$$\ln\left(\frac{y^2 - 1}{-4}\right) = 2x \rightarrow \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-y^2}{4}\right) = x \rightarrow f(x)^{-1} = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1-x^2}{4}\right)$$

9) Obtener la inversa de la función $y = \ln(\sqrt{x+1})$.

$$y = \ln(\sqrt{x+1}) \rightarrow e^y = \sqrt{x+1} \rightarrow (e^y)^2 = x+1 \rightarrow e^{2y} - 1 = x$$

$$f(x)^{-1} = e^{2y} - 1$$

10) La tarifa de una empresa de telefonía se compone de un coste fijo más un coste por minuto facturado. La compañía ofrece dos tarifas caracterizadas por los datos de la siguiente tabla:

	Coste fijo (€)	Coste / min (€)
Tarifa 1	2	0,3
Tarifa 2	11	0,15

¿A partir de cuántos minutos consumidos es preferible la Tarifa 2 a la Tarifa 1?

El coste total de cada tarifa viene dado por las funciones:

Tarifa 1: $f(x) = 2 + 0,3x$

Tarifa 2: $g(x) = 11 + 0,15x$

La condición que se pide es que el coste de la tarifa 2 sea menor que el de la tarifa 1.

Esto lo resolveremos con la siguiente inecuación:

$$11 + 0,15x < 2 + 0,3x$$

$$0,15x - 0,3x < 2 - 11$$

$$-0,15x < -9$$

$$x > \frac{-9}{-0,15}$$

$$x > 60$$

La tarifa 2 es preferible consumiendo más de 60 minutos.

11) Los gastos, G , de un hogar en bienes de consumo están relacionados con sus ingresos, I , de forma lineal. Si para un hogar determinado se sabe que para unos ingresos de 1000 € y 3000 € sus gastos son 450 € y 750 € respectivamente, determinar cuáles han de ser los ingresos para que los gastos sean de 12000 €.

Los gastos del hogar están determinados por una función lineal (recta):

$$G(I) = m * I + n$$

Nos han dado dos puntos de la recta:

$$(I = 1000, G = 450); (I = 3000, G = 750)$$

Con esto calcularemos la pendiente y la ordenada en el origen (m y n).

La pendiente es el incremento de G respecto de I :

$$m = \frac{\Delta G}{\Delta I} = \frac{750 - 450}{3000 - 1000} = \frac{300}{2000} = \frac{3}{20}$$

Para calcular n sustituimos uno de los puntos en la ecuación de la recta:

$$G(I) = m * I + n$$

$$450 = \frac{3}{20} * 1000 + n$$

$$450 - \frac{3}{20} * 1000 = n$$

$$n = 300$$

Por tanto, la función de los gastos del hogar es:

$$G(I) = \frac{3}{20} I + 300$$

Para obtener los ingresos que hacen que los gastos sean 12000 €, sustituimos en la función:

$$12000 = \frac{3}{20} I + 300 \rightarrow 12000 - 300 = \frac{3}{20} I \rightarrow I = \frac{12000 - 300}{3/20} = 78000$$

Los ingresos tendrían que ser 78000 €.